



Cartographie unifiée de la dynamique des solitons dans les guides d'onde à fibre optique

Emmanuel Tchomgo Felenou

► To cite this version:

Emmanuel Tchomgo Felenou. Cartographie unifiée de la dynamique des solitons dans les guides d'onde à fibre optique. Autre [cond-mat.other]. Université de Bourgogne, 2013. Français. NNT : 2013DIJOS026 . tel-00945451

HAL Id: tel-00945451

<https://theses.hal.science/tel-00945451>

Submitted on 12 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Bourgogne

École Doctorale CARNOT

Thèse

présentée par

Emmanuel TCHOMGO FELENOU

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en PHYSIQUE

CARTOGRAPHIE UNIFIÉE DE LA DYNAMIQUE DES SOLITONS DANS LES GUIDES D'ONDE À FIBRE OPTIQUE

Soutenue le 27 Juin 2013 à 14h15

devant le jury composé de :

J. Garnier	Professeur (Université de Paris Diderot)	Rapporteur
H. Leblond	Professeur (Université d'Angers)	Rapporteur
C. M. Ngabireng	Maître de conférence (Université de Yaoundé I)	Directeur de thèse
P. Tchofo Dinda	Professeur (Université de Bourgogne)	Directeur de thèse
T. C. Kofane	Professeur (Université de Yaoundé I)	Examineur
Majid Taki	Professeur (Université de Lille I)	Examineur

Equipe Solitons, Lasers et Communications Optiques (SLCO)
Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne, UMR 6303 CNRS
Faculté des Sciences, 9, avenue Alain Savary, BP 47870, 21078 Dijon, France

Je dédie ce travail

*A mon feu papa Felenou Jean Beau-Regard,
à ma maman Njudje Rose veuve Felenou, à
mon Amour Nadège et à tous mes frères et
sœurs.*

Remerciements

Ce travail de thèse résulte de la collaboration entre le Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne et le Laboratoire de Mécanique de l'Université de Yaoundé I. Ce travail, qui a démarré au Cameroun dans le cadre d'une convention de cotutelle internationale de thèse entre les universités de Bourgogne et de Yaoundé I, s'est poursuivi et finalisé au sein de l'équipe Solitons, Lasers et Communications Optiques (SLCO) du Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne (ICB). Je tiens à remercier Mr Guy Millot responsable de l'équipe SLCO, Mr Alain Dereux, Directeur de l'ICB, Mr Hans-Rudolf Jauslin, Directeur de l'Ecole Doctorale Carnot, ainsi que l'ensemble du personnel de cette équipe pour leur accueil chaleureux à mon arrivée au laboratoire ICB, leur hospitalité, et pour les moyens matériels qui ont été mis à ma disposition pour mener à bien ce travail de thèse.

Je remercie très chaleureusement les différents membres du jury : Majid Taki pour avoir accepté de présider le jury, Josselin Garnier et Hervé Leblond pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, Timoléon Crépin Kofane pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse et pour ses précieux conseils et remarques.

Je remercie particulièrement mes directeurs de thèse, Patrice Tchofo Dinda et Marie Claude Ngabireng, qui m'ont encadré durant toutes ces années de thèse et qui sont des encadreurs formidables faisant preuve d'une disponibilité exceptionnelle pour répondre à mes multiples questions, et qui m'ont permis d'accroître mon potentiel scientifique dans le domaine de l'optique non linéaire dans les fibres optiques.

Je remercie le Gouvernement Français à travers le Service de Coopération et d'Action Culturelle au Cameroun (SCAC-Cameroun) pour avoir financé en partie mes travaux de recherche.

Je remercie tous les enseignants des Départements de Physique des Universités de Dschang et de Yaoundé I au Cameroun pour les enseignements qu'ils m'ont dispensés tout au long de mon cursus universitaire.

Je remercie le Professeur Henri Gwét pour tout son appui et ses encouragements.

Je remercie mes différentes mamans : Chebou Dorothée , Tchouankem Micheline, Menkawoue Juliënne pour l'amour et le soutien qu'elles m'ont toujours donnés.

Je remercie tous mes aînés du laboratoire, en particulier G. Djuidje, S. Fewo, S. Nguetcho avec qui les discussions scientifiques ont toujours été très enrichissantes et fructueuses.

Je remercie Marcelle, Magda, Gang, Yves, Hermann, Charles, Alain, Innocent pour tous vos encouragements, la bonne humeur, l'attachement et l'amour que vous avez toujours manifestés à mon égard.

Je remercie Bruno, Moussa, Ali, Christophe, Kianouch,Phydias pour leur sympathie et tous les merveilleux moments passés en leur compagnie durant mon séjour à Dijon.

Je remercie la communauté estudiantine Camerounaise de Dijon.

je me dois de remercier la personne qui, tout le long de mon Parcours, a été à mes côtés, celle qui a toujours trouvé les paroles justes lors des moments difficiles, elle s'est **Nadège** . C'est une femme extrêmement forte et sans elle cette thèse n'aurait pas eu la même saveur.

Je ne saurais terminer mes remerciements sans une mention spéciale à mes parents, mes frères et mes sœurs, amis et connaissances, ainsi que les collègues qui m'ont encouragé pendant toutes les années qui m'ont conduit jusqu'à cette thèse.

A tous ceux dont les noms ne figurent pas, recevez mes profonds remerciements.

Table des matières

Introduction	11
Chapitre 1 Généralités sur la propagation de la lumière dans une fibre optique	21
1.1 Description de la fibre optique	21
1.2 Caractéristiques de la fibre	22
1.2.1 Les pertes de la fibre	22
1.2.2 La dispersion chromatique	24
1.3 Propagation des ondes lumineuses dans une fibre optique	28
1.3.1 Equations de Maxwell	28
1.3.2 Indice de réfraction et effet Kerr optique	29
1.3.3 Expression de la puissance optique	31
1.3.4 Equation de Schrödinger Non Linéaire (ESNL)	32
1.3.5 Régimes de propagation	33
1.3.5.1 Régime linéaire non dispersif	34
1.3.5.2 Régime dispersif	34
1.3.5.3 Régime non linéaire	35
1.3.5.4 Régime soliton	35
1.3.6 Effet de la dispersion	35
1.3.7 Auto-modulation de phase	38
1.3.8 Les solitons optiques	38
1.3.8.1 Le soliton conventionnel	39

1.3.8.2	Les pertes et le soliton moyen	39
1.3.8.3	Le soliton à gestion de dispersion	40
 Chapitre 2 Théorie des coordonnées collectives pour les impulsions lumineuses dans les fibres : Méthode des opérateurs de projection réduits		
		43
2.1	Introduction	43
2.2	Equations d'évolution des coordonnées collectives	46
2.3	Opérateurs de projection réduits	50
2.3.1	Traitement semi-analytique	50
2.3.2	Minimisation directe de l'énergie du champ résiduel via les OPR	53
2.4	Approximation bare	55
2.4.1	Approximation bare avec les OPC	56
2.4.2	Approximation bare avec les OP réduits	58
2.4.3	Application de l'approche des OPR à l'analyse de l'émission spontanée de rayonnement	59
2.5	Conclusion	63
 Chapitre 3 Impulsions lumineuses rayonnantes et non rayonnantes dans les guides d'onde à fibre optique		
		67
3.1	Introduction	67
3.2	Le soliton à centre de guidage (<i>guiding-center soliton</i>)	68
3.3	Rayonnement lié au support physique de transmission : les bandes de Kelly	73
3.3.1	Caractère rayonnant de la ligne de transmission	73
3.3.2	Point fixe - Impulsion stationnaire	76
3.4	Rayonnement lié au désaccord de profil initial entre l'impulsion injectée à l'entrée de la ligne de transmission et l'impulsion stationnaire de cette ligne	78
3.4.1	Equation de propagation du rayonnement	80
3.4.2	Principaux types de comportements dynamiques au voisinage de l'état stationnaire	85

3.4.2.1	Soliton idéal	88
3.4.2.2	Solitons hyperthermiques rayonnants et non rayonnants	90
3.4.2.3	Solitons hypothermiques rayonnants et non rayonnants	91
3.4.3	Illustration quantitative de la dynamique des solitons perturbés	93
3.4.3.1	Soliton idéal	97
3.4.3.2	Soliton hyperthermique rayonnant	98
3.4.3.3	Soliton hyperthermique non rayonnant	99
3.4.3.4	Soliton hypothermique rayonnant	100
3.4.3.5	Soliton hypothermique non rayonnant	101
3.4.4	Identification directe de la <i>classe dynamique</i> d'une impulsion rayonnante	102
3.5	Conclusion	107

Chapitre 4 Etude du rayonnement impulsionnel dans les lignes de transmission à gestion de dispersion 111

4.1	Introduction	111
4.2	Equation de propagation	113
4.2.1	Point fixe - champ stationnaire	114
4.2.2	Equation de Propagation du rayonnement	116
4.3	Identification de la classe dynamique du soliton perturbé	119
4.3.1	Prédiction de la classe dynamique des impulsions les plus proches du point fixe de profil de forme sécante hyperbolique et Gaus- sienne	121
4.3.2	Identification de la classe dynamique des impulsions (Sech et Gaussienne) les plus proches du point fixe	122
4.4	Illustration quantitative du comportement rayonnant du soliton perturbé	125
4.4.1	Cas des impulsions les plus proches du champ stationnaire . .	125
4.4.1.1	Illustration quantitative du rayonnement associé à l'im- pulsion sécante hyperbolique	125
4.4.1.2	Illustration quantitative du rayonnement associé à l'im- pulsion Gaussienne	126

4.4.2	Cas des impulsions de profil quelconque mais proche du champ stationnaire	127
4.4.2.1	Soliton idéal	128
4.4.2.2	Soliton hyperthermique non rayonnant	129
4.5	Conclusion	130
Chapitre 5 Etude du rayonnement impulsional par la méthode des coordonnées collectives.		133
5.1	Introduction	133
5.2	Considérations qualitatives générales	134
5.2.1	Cas des systèmes à gestion de dispersion	134
5.2.1.1	Dynamique d'une impulsion non perturbée par le rayonnement	135
5.2.1.2	Dynamique de l'impulsion subissant une réaction du rayonnement	137
5.2.1.3	Analyse des coordonnées collectives du rayonnement	140
5.3	Simulations numériques	142
5.3.1	Cas des lignes à dispersion constante	143
5.3.1.1	Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Sech	144
5.3.1.2	Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Gaussien	146
5.3.2	Cas des lignes à Gestion de dispersion	147
5.3.2.1	Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Sech	147
5.3.2.2	Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Gaussien	147
5.3.2.3	Propagation d'un soliton idéal	148
5.4	Conclusion	154
Conclusion et perspectives		157

Annexe A Compléments sur les impulsions lumineuses rayonnantes et non rayonnantes dans les guides d'onde à fibre optique	162
A.1 Soliton hyperthermique rayonnant généré par une perturbation modulée en phase	162
A.2 Soliton hypothermique rayonnant pour une perturbation modulée en phase	163
Annexe B Liste des publications	165
Bibliographie	174

Introduction

L'invention du laser dans les années soixante a provoqué des rapprochements insoupçonnés entre plusieurs grandes branches des sciences modernes, conduisant à des développements scientifiques interdisciplinaires dont les applications pratiques sont omniprésentes dans la vie quotidienne. L'une des grandes branches scientifiques issue de cette interdisciplinarité est l'optique non linéaire (ONL), qui est née du croisement entre les sciences de l'optique et celles de la matière, et qui regroupe les phénomènes d'interaction laser-matière résultant du confinement des faisceaux lasers dans les matériaux diélectriques. Un des plus fascinants de ces phénomènes d'interaction laser-matière est le *soliton*, qui représente un processus de localisation d'énergie, de durée de vie exceptionnellement longue. Dans un diélectrique tel qu'une fibre optique, le soliton résulte de l'action simultanée et équilibrée de deux phénomènes, à savoir, l'*effet Kerr* et la *dispersion chromatique*, qui agissent exactement en sens inverse et se neutralisent. L'équilibre entre la non linéarité (induite par l'effet Kerr) et la dispersion (induite par la dépendance en fréquence de l'indice de réfraction du matériau diélectrique) constitue le mécanisme créateur du soliton conventionnel, qui est le type de soliton le plus répandu dans un grand nombre de branches scientifiques. En effet, le soliton conventionnel n'est pas une invention liée au développement de l'ONL dans les fibres optiques. Le concept de soliton a été élaboré il y a plusieurs décennies par Norman Zabusky et Martin Krustal [1], puis observé dans des systèmes aussi divers que les plasmas, les lignes de jonction Josephson, les chaînes atomiques, avant d'être découvert et observé expérimentalement dans les fibres optiques [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. En fait, depuis plusieurs décennies, le concept de soliton poursuit son expansion dans

des domaines de plus en plus variés des sciences fondamentales et appliquées. Le *soliton*, tel qu'il fut découvert par Zabusky et Kruskal, correspond à une onde solitaire robuste dotée d'une aptitude à se propager sur de grandes distances sans déformation de profil et sans diminution de vitesse. Cependant, au fil du temps, le terme *soliton* a acquis une connotation spécifique selon le domaine scientifique dans lequel il est utilisé. En mathématique, le *soliton* désigne une solution exacte de certaines classes d'équations non linéaires associées à des systèmes totalement intégrables. De toute évidence, le soliton, comme objet mathématique, correspond à une représentation idéalisée du monde réel, où l'onde se propage sur un support physique parfait, sans défauts ni perturbations.

Or le physicien, qui étudie le monde réel, est rarement confronté avec des problèmes exacts relevant du terme mathématique de strict *soliton*. En effet, les systèmes physiques réels sont toujours plus ou moins perturbés (c'est-à-dire, non totalement intégrables) et conséquemment, le terme mathématique de strict *soliton* doit être remplacé par celui de *quasi-soliton*, qui fait référence à un paquet d'énergie se propageant sans déformation ni modification de vitesse trop importantes. Toutefois, signalons que dans la littérature il y a parfois une confusion dans l'utilisation du terme *soliton* comme objet mathématique (soliton idéal) et comme objet physique (quasi-soliton). En physique, à l'heure actuelle on utilise simplement le terme *soliton* sans le distinguer du soliton idéal. Il est aussi utile de rappeler que le soliton fait partie de la classe spéciale d'ondes solitaires. Une onde solitaire est une onde progressive localisée, du type $\phi(x - vt)$, où x et t représentent respectivement les coordonnées d'espace et de temps, v la vitesse de propagation, et ϕ est asymptotiquement nul pour $x - vt \rightarrow \infty$. Lorsqu'on identifie le soliton comme solution à un problème de propagation dans un système physique réel, la question se pose invariablement de savoir comment ces solitons se comportent sous l'action de perturbations extérieures (ou même internes au système).

Un grand nombre de travaux théoriques et expérimentaux sur des systèmes physiques réels ont été consacrés à l'examen du comportement dynamique des solitons en présence de perturbations physiques de différents types telles que les inhomogénéités de structure du support physique, les impuretés, la dissipation, les non linéarités

d'ordre supérieur, les effets de réseaux discrets, etc. Ces travaux ont permis d'accomplir des progrès substantiels tant au niveau de la compréhension du comportement du soliton perturbé, qu'au niveau du développement de nouveaux outils d'analyse théorique. A cet égard, l'un des progrès les plus significatifs concerne la technique mathématique de la Méthode Inverse (Inverse Scattering Technique), conçue à l'origine pour déterminer les solutions solitons pour des systèmes complètement intégrables, qui a pu être étendue au traitement des systèmes non totalement intégrables, notamment les systèmes affectés de petites perturbations [10, 11, 12].

Dans le même contexte, un formalisme de perturbation basé sur la technique des fonctions de Green a permis de traiter le cas des solutions multi-solitons [13]. De manière inattendue, au fil de ces travaux sur les solitons perturbés, le «comportement corpusculaire» du soliton se confirme. En d'autres termes, le soliton apparaît comme une entité collective parfaitement définie, à laquelle on peut attribuer une masse et appliquer un traitement théorique similaire à celui habituellement réservé aux particules en mouvement. C'est ainsi qu'émerge une technique basée sur le principe variationnel, qui permet de calculer l'évolution des paramètres d'un soliton en présence de faibles perturbations [14, 15]. On peut également mentionner le développement d'une méthode d'analyse physique des perturbations en terme d'analyse de stabilité linéaire [16, 17], ainsi que la mise en place de techniques numériques très élaborées [18, 19].

Ce développement des outils d'analyse théorique a naturellement accéléré les progrès dans la compréhension du comportement d'un soliton perturbé. Ainsi, on peut mentionner, sans être exhaustif, que la présence de petites perturbations dans un système servant de support à la propagation des solitons conduit à trois effets fondamentaux :

- (i) une modification de la forme du soliton par rapport à son profil idéal (en absence de toute perturbation).
- (ii) Il apparaît une dynamique lente dans les paramètres physiques internes du soliton.
- (iii) Le soliton génère une queue, c'est-à-dire, un paquet d'ondes de faible amplitude qui suit, ou quelque fois précède le soliton [10, 11, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

Ce phénomène constitue incontestablement le comportement le plus spectaculaire d'un soliton perturbé. C'est aussi le phénomène dont les conséquences sont les plus dramatiques pour la stabilité de propagation du soliton. Un des résultats les plus significatifs des travaux antérieurs est la découverte qu'un soliton perturbé ne génère pas systématiquement une queue, et qu'il existe même des grandes classes de perturbations qui ne conduisent pas à la création d'une queue [10, 11, 20, 22, 24]. A ce stade, il nous semble utile de faire un point sur la terminologie ancienne de «queue du soliton» qui peut prêter à confusion. En effet, cette terminologie sous entend que le paquet d'ondes généré par le soliton perturbé demeure une composante du soliton, alors qu'en réalité ce paquet d'onde évolue de manière à acquérir sa propre identité. Conséquemment, dans la suite de ce mémoire nous utiliserons plutôt le terme «onde de rayonnement» en lieu et place de «queue de soliton».

La problématique de l'émission spontanée de rayonnement (ESR) par un soliton perturbé tire sa principale substance du fait que ce phénomène ne se produit pas de manière systématique. A cela vient se greffer un autre fait important largement démontré dans les travaux antérieurs, à savoir, l'existence d'une variété de processus de rayonnement incroyablement riche [10, 11, 20, 21, 22, 23, 24, 25] dont les conséquences sont diverses et multiples qu'il est pratiquement impossible d'en dresser une liste de manière exhaustive.

Ce mémoire vise à apporter une contribution à l'effort de recherche mené depuis plusieurs décennies pour comprendre les mécanismes physiques fondamentaux qui gouvernent le comportement dynamique des solitons soumis à un environnement perturbé. Pour donner également à ce projet de thèse une visée applicative, nous avons choisi comme support physique pour la propagation de solitons, deux types de guides d'ondes à fibres optiques correspondant respectivement à une ligne de transmission conventionnelle (à dispersion constante et amplification périodique) [20] et une ligne de transmission à gestion de dispersion (constituée d'une concaténation de tronçons de fibres à dispersion alternativement positive et négative) [26]. Rappelons qu'une ligne de transmission ultra-longue distance est constituée par la répétition d'une même structure de base (appelée *motif élémentaire*), qui est constituée d'un ou plusieurs tronçons de fibres de transmission et divers composants optiques in-

cluant l'amplificateur (dont le rôle est de compenser les pertes de toute nature subies par l'impulsion). Chaque motif élémentaire est déployé sur une distance Z_A appelée *pas d'amplification*. Les lignes de transmission ultra-longue distance sont donc des guides d'onde périodique de période Z_A , qui admettent (ou qui sont conçues pour admettre) des *impulsions stationnaires* que l'on appelle aussi *points fixes* de transmission. L'appellation *impulsion stationnaire* fait référence à une impulsion qui se propage en exécutant de manière périodique une déformation de profil, dont la périodicité correspond exactement au pas d'amplification du guide d'onde. Si l'on fait abstraction de la dynamique de l'impulsion à l'intérieur de chaque motif élémentaire (*dynamique rapide*), et si l'on ne s'intéresse qu'à l'état du profil de l'impulsion à la sortie de chaque motif élémentaire (*dynamique lente*), alors l'impulsion stationnaire affichera un comportement identique à celui d'un soliton conventionnel. Autrement dit, en dynamique lente, l'impulsion stationnaire se propage sans déformation de profil, et à ce titre, bénéficie du qualificatif de «soliton». On trouve dans la littérature des techniques numériques sophistiquées dédiées à la détermination du profil d'intensité et de phase des impulsions stationnaires dans les lignes de transmission [27]. Ces techniques ont révélé que les profils d'impulsions stationnaires dans les lignes de transmissions à ultra-haut débit ($> 80\text{Gb/s/canal}$) sont plutôt complexes. L'exemple qui illustre le mieux cette complexité est sans doute le profil du *soliton à gestion de dispersion* [23, 24, 28, 29], qui contient d'importantes rugosités sur les fronts avant et arrière de l'impulsion (appelées «lobes latéraux»). La complexité de profil des impulsions stationnaires constitue l'une des difficultés majeures des activités de développement et d'optimisation des systèmes de transmission basés sur le format de modulation RZ. En effet, au niveau pratique, ce type de profil d'impulsion n'est pas réalisable avec les dispositifs optiques disponibles actuellement. Il est même particulièrement difficile d'approcher ces profils dans les systèmes de transmission à très haut débit, car les technologies de modulation y sont généralement utilisées à leurs limites. En pratique, on s'efforce d'approcher au mieux le profil stationnaire ψ_s par une impulsion réaliste de profil ψ , délivrée par un modulateur de lumière. Du fait de la proximité entre ψ_s et ψ , la ligne de transmission ressent la présence de ψ comme celle d'un soliton perturbé par un champ q correspondant à l'écart de profil entre ψ_s et ψ :

$\psi = \psi_s + q$, où l'amplitude du champ de perturbation est considérablement plus faible que celle de ψ_s . Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons précisément à ce type de perturbation, qui est inévitablement générée à l'entrée des lignes de transmission basées sur le format de modulation RZ du fait de l'impossibilité actuelle de synthétiser des profils d'impulsion complexes, et qui est à l'origine du comportement rayonnant des impulsions. Il est important de noter que la présence des ondes de rayonnement dans un système de transmission constitue un facteur pénalisant pour la stabilité des impulsions dans le système [21, 23, 24]. Pourtant jusqu'à présent, il n'existe aucune stratégie spécifiquement dédiée à la suppression (ni même la réduction) des ondes de rayonnement dans ces systèmes, ni de stratégie pour inhiber le comportement rayonnant des impulsions lumineuses. Dans les activités de conception, développement ou optimisation des systèmes de communication optique, les ondes de rayonnement sont simplement considérées comme un bruit de photons ordinaire et traitées comme tel, c'est-à-dire, traitées par des techniques classiques de filtrage spectral ou temporel. En réalité, le principal verrou dans l'élimination d'un processus de rayonnement est lié au fait que l'onde de rayonnement fait corps avec l'impulsion de manière insidieuse. Ses composantes spectrales sont si proches de celles de l'impulsion qu'il devient extrêmement difficile de les éliminer sans altérer le spectre de l'impulsion. Cette proximité entre les composantes spectrales de l'impulsion et celles du rayonnement a comme autre conséquence que les champs électriques de ces deux entités restent imbriqués longtemps (sur une distance relativement importante), avant la survenue de la séparation entre les deux champs. A cette «distance de séparation» s'ajoute la «distance de création», qui est la distance de propagation dont l'impulsion a besoin pour se restructurer et générer les composantes spectrales du rayonnement. Dans l'état actuel des connaissances, la distance de création du rayonnement est pratiquement impossible à prédire.

Ce projet de thèse n'a pas pour ambition de faire sauter tous les verrous scientifiques suscités, ni de mettre en place une stratégie de suppression des processus de rayonnement pour la prochaine génération des systèmes de communication à très haut débit basés sur les transmissions cohérentes et format de modulation avancés. Plus modestement, nous nous sommes efforcés, au travers de ce projet de thèse, de

progresser néanmoins vers ces objectifs, par des avancées aussi bien au niveau des concepts qu'au niveau de l'analyse du comportement du soliton. En procédant de cette manière, nous avons tout naturellement créé une boîte à outils dédiée au traitement des effets de rayonnement dans les systèmes où cet effet est indésirable.

Dans nos travaux, nous nous sommes tout particulièrement attachés à :

(i) identifier les mécanismes physiques qui déclenchent le processus de rayonnement. Cette connaissance est indispensable à la mise en place d'une procédure d'inhibition de l'émission de rayonnement par un soliton ;

(ii) identifier les effets de rétroaction du rayonnement sur l'impulsion, afin d'avoir le meilleur aperçu des pénalités que le rayonnement peut infliger aux systèmes de transmission ;

(iii) mettre en place les équations qui gouvernent la dynamique des paramètres physiques du soliton, ainsi que les équations d'évolution des paramètres des ondes de rayonnement. Ces équations contiennent des éléments de prédiction de deux caractéristiques majeures du rayonnement, à savoir sa fréquence et sa vitesse de déplacement par rapport au référentiel de repos de l'impulsion solitonique.

Ainsi, ce travail de thèse sur le comportement dynamique des solitons perturbés dans des guides d'onde à fibre optique nous a permis de réaliser des avancées conceptuelles majeures avec notamment la mise en évidence, pour la première fois, des concepts de «soliton froid», «soliton chaud» et «soliton isothermique». En effet nous avons découvert que la collision entre un soliton et un champ perturbateur peut conduire à trois grands scénarios de comportement dynamique :

(i) A l'issue de la collision, le soliton perturbé peut se retrouver avec une énergie légèrement plus basse que celle du soliton non perturbé, et se propager de manière hautement stable avec ce déficit d'énergie. Nous avons baptisé ce type d'impulsion «soliton hypothermique», avant d'utiliser très largement le synonyme de «soliton froid». En effet tout se passe ici comme si la collision initiale avait refroidi l'impulsion.

(ii) Dans d'autres conditions, à l'issue de la collision, le soliton perturbé peut se retrouver avec une énergie légèrement plus élevée que celle du soliton non perturbé, et se propager de manière hautement stable avec cet excédent d'énergie. Nous avons donné à ce type d'impulsion le nom de «soliton hyperthermique», et le synonyme

«soliton chaud» pour faire simple.

(iii) Nous avons mis en évidence un cas spécial de collision entre le soliton et la perturbation, à l'issu duquel le soliton expulse totalement la perturbation et poursuit sa propagation dans un état non perturbé. Nous avons qualifié ce type d'impulsion de «soliton isothermique» (ou plus simplement «soliton idéal»).

Par ailleurs, nous avons établi l'existence de solitons perturbés qui n'émettent aucun rayonnement. Certains de ces solitons non rayonnants se propagent en état d'hypothermie (c'est-à-dire avec une énergie légèrement plus basse que celle du soliton idéal), alors que d'autres solitons non rayonnants se propagent en état d'hyperthermie. Ainsi donc, au prix d'une analyse très méticuleuse, nous avons réussi à dresser une cartographie unifiée incluant les différents types de comportements dynamiques de solitons perturbés. Cette analyse s'appuie sur une méthodologie qui combine les équations de Schrödinger non linéaires (décrivant la propagation des champs électriques pour l'impulsion et le rayonnement), et les méthodes de coordonnées collectives (qui décrivent l'évolution des paramètres physiques de l'impulsion et ceux du rayonnement).

La suite de ce mémoire s'organise en cinq chapitres.

Le premier chapitre présente quelques généralités sur la propagation de la lumière dans les fibres optiques.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la méthode des opérateurs de projection réduits, que nous avons mis au point au cours de cette thèse, qui constitue une version de la méthode des coordonnées collectives proposée initialement par Boesch et *al.* [30].

Dans le troisième chapitre, nous examinons minutieusement les comportements rayonnants et non rayonnants des solitons dans une ligne conventionnelle à dispersion constante et amplification périodique. Nous introduisons les concepts de *soliton chaud*, *soliton froid* et *soliton isothermique*, et nous dressons la cartographie générale des comportements d'un soliton perturbé.

Dans le quatrième chapitre, nous effectuons la même étude que dans le troisième chapitre mais sur un support physique constitué d'une ligne à gestion de dispersion. Nous montrons alors que les solitons à gestion de dispersion s'intègrent parfaitement

dans la cartographie dressée dans le troisième chapitre.

Dans le cinquième chapitre, nous montrons que les méthodes de coordonnées collectives sont utilisables pour obtenir les détails les plus fins du comportement dynamique des solitons perturbés. De plus, ces méthodes présentent l'énorme avantage de fournir d'importants résultats ayant une valeur prédictive.

Dans la conclusion nous présentons une synthèse des résultats les plus significatifs de la thèse et nous dégageons quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur la propagation de la lumière dans une fibre optique

1.1 Description de la fibre optique

La fibre optique est un guide d'onde diélectrique dont le constituant principal est la silice (SiO_2). Elle a pour vocation principale de guider une onde électromagnétique d'une extrémité de la fibre à l'autre. Elle est constituée d'un cœur cylindrique de quelques μm de diamètre, entouré d'une partie extérieure de diamètre beaucoup plus grand nommée gaine, et l'ensemble est enrobé d'un revêtement de protection en gaines plastiques ou de polymères. Le confinement et le guidage de la lumière dans le cœur est obtenu grâce à une différence d'indice de réfraction entre le cœur (d'indice n_c) et la gaine (d'indice n_g) qui assure la réflexion totale de la lumière sur l'interface cœur-gaine. Les deux diélectriques étant à la base constitués du même matériau, cette différence d'indice résulte de l'adjonction de dopants dans le cœur et la gaine. Le cœur est généralement dopé à l'Oxyde de Germanium (GeO_2) [31, 32] ou à l'oxyde de phosphore (P_2O_5), ce qui augmente son indice alors que la gaine est dopée à la Fluorine qui diminue son indice de réfraction. L'un des paramètres importants dans le guidage de la lumière dans une fibre optique monomode est la longueur d'onde de coupure notée λ_c [33] qui est définie par :

$$\lambda_c = \frac{2\pi a \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{2.405}, \quad (1.1)$$

où a représente le rayon du cœur de la fibre.

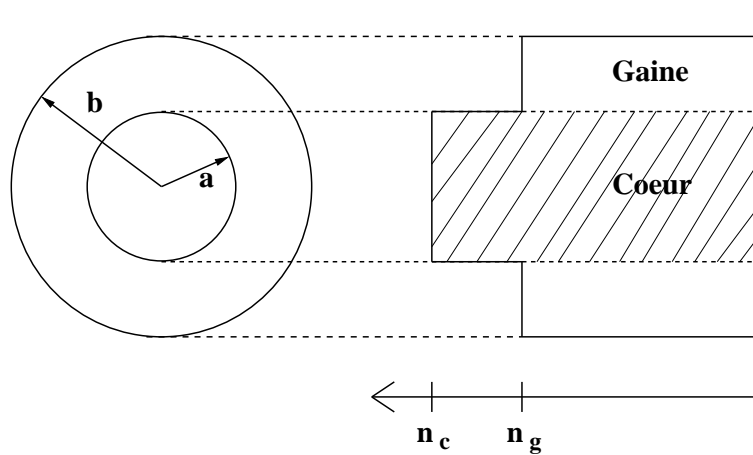


FIGURE 1.1 Section transverse d'une fibre à saut d'indice et du profil d'indice de réfraction

En pratique divers profils d'indice sont utilisés selon le type d'application (fibre à saut d'indice, fibre à gaine semi enterrée, fibre à gaine surélevée, fibre à cœur triangulaire). Le plus utilisé est le profil à saut d'indice dans lequel la fibre est constituée de deux zones concentriques homogènes avec un saut brutal d'indice à l'interface (voir Figure 1.1). Une fibre à saut d'indice sera multi-mode pour des longueurs d'onde $\lambda < \lambda_c$, et dans ce cas, le nombre de mode sera d'autant plus élevé que la longueur d'onde sera faible (par rapport à λ_c). Par contre, si $\lambda > \lambda_c$ on aura une fibre mono-mode et dans ce cas un seul mode de propagation sera excité par l'impulsion. Cette dernière catégorie de fibre reste la plus utilisée actuellement dans les systèmes de communications optiques.

1.2 Caractéristiques de la fibre

Les fibres optiques dédiées aux transmissions sont caractérisées par les principaux paramètres suivants :

1.2.1 Les pertes de la fibre

Au cours de sa propagation dans la fibre optique, la lumière subit des pertes se traduisant par une diminution de l'intensité de l'onde. Ces pertes sont d'origines

multiples parmi lesquelles figurent :

- Les pertes intrinsèques

Les pertes intrinsèques regroupent l'ensemble des pertes liées à la nature du matériau dont est faite la fibre. Ces pertes étant intimement liées à l'interaction silice/lumière, il est impossible de s'en affranchir. La première source de pertes est la diffusion Rayleigh [31]. La diffusion Rayleigh provient de la diffusion élastique de la lumière par la matière : la lumière interagit avec la matière, puis est réémise dans toutes les directions sans perte d'énergie. Remarquons que l'intensité diffusée varie en fonction de l'angle par rapport à l'onde incidente : une majorité de photons seront réémis dans leur direction de propagation initiale. Les photons diffusés dans des directions opposées ou transverses à la direction de propagation initiale contribuent aux pertes.

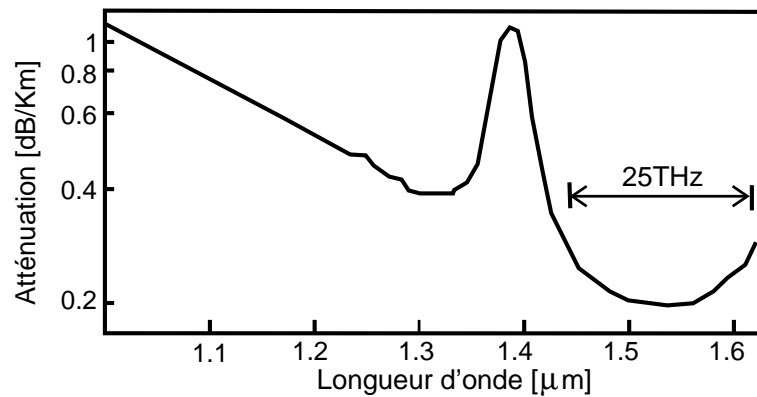


FIGURE 1.2 Evolution du coefficient des pertes dans une fibre optique monomode en silice en fonction de la longueur d'onde λ .

L'absorption de la silice est le deuxième facteur à prendre en compte dans le cadre des pertes intrinsèques. Cette absorption apparaît dans l'infrarouge à partir de $1.6\mu m$ environ. Comme on peut le voir sur la Figure 1.2, des techniques de fabrication très élaborées permettent de nos jours d'obtenir des fibres avec des pertes à la limite intrinsèque de la diffusion Rayleigh c'est-à-dire de $0.2dB/km$ autour de $1.55\mu m$. C'est pour cette raison que cette longueur d'onde a été choisie pour les télécommunications.

- Pertes liées aux imperfections des processus de fabrication.

Ces pertes sont liées aux processus de fabrication (bulles d'air, craquelure, préformes non parfaitement circulaires, etc.) et peuvent provoquer des variations locales

de l'indice optique du matériau entraînant ainsi la diffusion de la lumière dans toutes les directions. En outre, la présence d'eau dans l'atmosphère lors du tirage de la fibre peut générer des d'ions OH^- dans le cœur de celle-ci. Ces ions sont responsables du pic d'absorption observé autour de $1.4\mu m$ (Figure 1.2).

- Les pertes mécaniques

Elles résultent des contraintes mécaniques du type enroulement (bending). Une partie non négligeable de la lumière se diffuse alors dans la gaine, provoquant une augmentation considérable des pertes si le rayon d'enroulement est trop faible. Notons aussi qu'une partie importante des pertes optiques d'origine mécanique sont également dues aux conditions d'injection de la lumière dans la fibre et au couplage entre fibres.

De manière générale, les pertes dans une fibre optique sont caractérisées par un coefficient d'absorption linéique α (en km^{-1}). Pour une puissance P_0 injectée dans une fibre optique de longueur L , la puissance transmise P_t s'exprimera par :

$$P_t = P_0 \exp(-\alpha_L L). \quad (1.2)$$

Pour des raisons d'ordre pratique, les pertes sont généralement exprimées en décibel par kilomètre (dB/km). Le coefficient de perte en décibel, noté α_{dB} , s'écrit alors :

$$\alpha_{dB} = -\frac{10}{L} \log_{10} \left(\frac{P_t}{P_0} \right) = 4.343\alpha_L. \quad (1.3)$$

1.2.2 La dispersion chromatique

Au cours de sa propagation dans un milieu diélectrique, l'impulsion lumineuse interagit avec les électrons liés du matériau. La dispersion chromatique qui est l'une des conséquences de cette interaction traduit la dépendance de l'indice de réfraction n du milieu de propagation par rapport à la longueur d'onde de l'impulsion. Cette dépendance est connue avec une bonne approximation à travers la relation de Sellmeier [31]

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (1.4)$$

où les ω_j et B_j désignent respectivement les fréquences et les forces de la j^{ime} résonance des électrons. La sommation dans la relation (1.4) porte sur toutes les résonances du matériau comprises dans les bandes de fréquence considérées. En ce qui concerne les fibres optiques, les résonances principales sont au nombre de trois ($m = 3$) et les valeurs des coefficients B_j dépendent des différents constituants du cœur de la fibre [34, 35]. Pour la silice fondue, les paramètres suivants ont été calculés à partir d'une courbe de dispersion expérimentale [36].

Numéro de résonance	Longueur d'onde λ_j (μm)	Force B_j
1	0.0684043	0.6961663
2	0.1162414	0.4079426
3	9.896161	0.8974794

TAB. 1.1 Coefficients de la relation de Sellmeier pour la silice pure.

La dispersion joue un rôle important dans la propagation d'une impulsion courte puisque ses composantes spectrales de largeur $\Delta\omega$ se propagent avec des vitesses $C/n(\omega)$ différentes, ce qui induit un étalement temporel de l'impulsion durant sa propagation. Les effets de la dispersion chromatique sur une onde lumineuse peuvent être traités mathématiquement en développant en série de Taylor la constante de propagation autour de la fréquence de la porteuse ω_0 . On obtient alors

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots, \quad (1.5)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Grâce à la relation de Sellmeier (1.4), β_1 et β_2 (qui représentent respectivement l'inverse de la vitesse de groupe v_g et la dispersion de la vitesse de groupe (DVG)) peuvent s'exprimer en fonction de l'indice de réfraction et de ses dérivées

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right), \quad (1.6)$$

$$\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right). \quad (1.7)$$

Généralement, on évalue β_2 à partir d'un paramètre mesurable D , exprimé en $ps\ nm^{-1}km^{-1}$, qui traduit l'élargissement temporel induit par la dispersion d'une impulsion de largeur $1\ nm$ lorsqu'elle se propage sur une distance de $1\ km$ dans une fibre monomode. Ce paramètre est relié à β_2 par la relation :

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2. \quad (1.8)$$

Il est important de remarquer que D est le fruit de la contribution de deux effets : la dispersion chromatique du matériau D_m , et la dispersion du guide D_g . La dispersion D_m a un comportement monotone vis-à-vis de la longueur d'onde, et s'annule pour la silice au voisinage de $1.27\mu m$. La contribution D_g , liée aux caractéristiques géométriques de la fibre décale la longueur d'onde de la dispersion nulle λ_D vers $1.32\mu m$. Cette valeur de λ_D peut être modifiée par la nature et la qualité des dopants (GeO_2 ou P_2O_5 par exemple) utilisés pour créer la différence d'indice entre le cœur et la gaine de la fibre. Quelque soit sa valeur, λ_D permet de définir deux régimes de dispersion (Figure (1.3)). Pour des longueurs d'onde tel que $\lambda < \lambda_D$, la dispersion est dite normale ($\beta_2 > 0$ ou $D < 0$) alors que pour $\lambda > \lambda_D$ la dispersion sera dite anormale ($\beta_2 < 0$ ou $D > 0$). Par ailleurs, en jouant sur le profil d'indice (à travers la nature et la qualité des dopants par exemple), on peut décaler le zéro de la dispersion vers la troisième fenêtre de télécommunication située autour de $1.55\mu m$. On réalise ainsi une fibre dite à dispersion décalée ou DSF (Dispersion Shifted Fiber). De nos jours, les connaissances scientifiques et technologiques permettent aux industriels de pouvoir disposer d'une gamme très complète de fibres optiques qui les autorise à imaginer des systèmes de télécommunication comportant aussi bien des fibres à dispersion nulle, positive ou négative, mais aussi de pouvoir choisir le signe et la pente de la dispersion [33]. Ces fibres ont pour acronymes :

- SMF (Single Mode Fiber), ou fibre standard, fut la première fibre mono-mode disponible commercialement.
- La Téralight, a été spécifiée et développée par la société Alcatel, et est utilisée aujourd'hui principalement pour les applications terrestres.
- NZDSF+ (Non- Zero Dispersion Shifted Fiber) désigne des fibres ayant une dispersion à $1550nm$ faiblement positive (c'est-à-dire dans la plage de $+2$ à $+6ps/nm/km$)

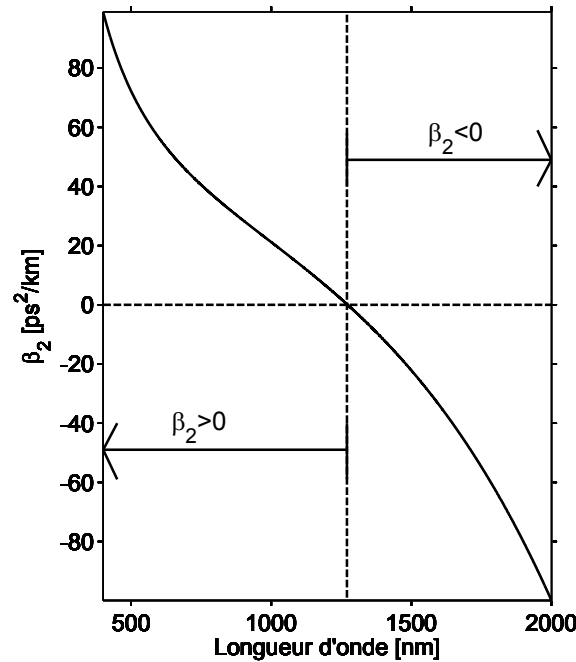


FIGURE 1.3 Evolution de la dispersion d'ordre deux en fonction de la longueur d'onde.

- NZDSF- (Non- Zero Dispersion Shifted Fiber) désigne des fibres ayant une dispersion à 1550nm faiblement négative (c'est-à-dire dans la plage de -2 à $-6\text{ps}/\text{nm}/\text{km}$)
- DSF (Dispersion Shifted Fiber) désigne des fibres fabriquées à l'origine pour avoir une dispersion nulle ou tout au moins très faible à 1550nm .
- RDF (Reverse Dispersion Fiber) désigne une fibre ayant pour but de compenser exactement la SMF en dispersion et en pente de dispersion.
- DCF (Dispersion Compensating Fiber) est une fibre très dispersive mais avec une surface effective très faible.

La diversité de ces fibres permet une grande souplesse dans les applications qui peuvent en être faites. Le Tableau 1.2 suivant présente les caractéristiques principales de ces fibres optiques.

Désignation	Pertes [dB/km]	Dispersion [ps/nm/km]	Pente de la Dispersion [ps/nm ² /km]	Aire effective [μm ²]
<i>SMF</i>	0.2	+17	0.056	80
<i>Teralight</i>	0.22	+8	0.06	65
<i>NZDSF+</i>	0.22	[+2, +6]	0.06	55
<i>DSF</i>	0.22	≈ 0	0.06	55
<i>NZDSF−</i>	0.22	[−4, −2]	0.06	55
<i>RDF</i>	0.3	−30	−0.11	27
<i>DCF</i>	0.5	−90	−0.3	20

TAB. 1.2 Caractéristiques de quelques fibres optiques standards à $\lambda = 1.55\mu m$.

Notons que ces valeurs ne sont données qu'à titre indicatif pour chacun de ces types de fibre. Il existe en particulier, de nombreuses fibres de types NZDF+ et NZDSF- fabriquées par différents producteurs et donc les caractéristiques en pente de dispersion et en surface effective diffèrent des valeurs données ici.

1.3 Propagation des ondes lumineuses dans une fibre optique

1.3.1 Equations de Maxwell

La propagation des ondes électromagnétiques dans une fibre optique est régie par les équations de Maxwell suivantes

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.10)$$

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (1.12)$$

avec les relations constitutives $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ et $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Les vecteurs $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{D} = \vec{D}(x, y, z, t)$, $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ et $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z, t)$

représentent respectivement le champ électrique, l'induction électrique, l'induction magnétique, le champ magnétique, et la polarisation dans le matériau diélectrique homogène et isotrope constitué par la fibre optique. μ_0 et ε_0 désignent respectivement la perméabilité et la permittivité du vide. A partir des équations de Maxwell, on obtient l'équation de propagation du champ électrique :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (1.13)$$

Dans le domaine des fréquences, l'équation de propagation s'écrit :

$$\nabla^2 \tilde{E}(x, y, z, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}(x, y, z, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \tilde{P}(x, y, z, \omega). \quad (1.14)$$

où $\tilde{E}(x, y, z, \omega)$ et $\tilde{B}(x, y, z, \omega)$ sont respectivement les transformées de Fourier de $\vec{E}(x, y, z, t)$ et $\vec{B}(x, y, z, t)$ définies par :

$$\tilde{E}(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(x, y, z, t) \exp(i\omega t) dt, \quad (1.15)$$

$$\tilde{P}(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}(x, y, z, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (1.16)$$

1.3.2 Indice de réfraction et effet Kerr optique

La présence d'un champ électromagnétique incident dans un milieu diélectrique induit un déplacement des charges et une polarisation au sein du matériau. Dans le cas d'une onde incidente de faible amplitude devant le champ électrique du matériau et de fréquence suffisamment éloignée de ses fréquences de résonance, la réponse du milieu est proportionnelle au champ incident. La réponse est alors dite linéaire. L'ensemble des systèmes dynamiques a plutôt tendance à adopter naturellement, une réponse non linéaire. Dans notre cas, où une onde lumineuse intense traverse un matériau diélectrique, une réponse non linéaire se traduit par une polarisation dont l'amplitude n'est plus linéairement proportionnelle au champ incident. En considérant une fibre isotrope, non biréfringente et un champ initial \tilde{E} polarisé rectilignement, nous pouvons exprimer la polarisation résultante sous la forme d'un développement

en série de puissances du champ électrique :

$$\tilde{P} = \tilde{P}_l + \tilde{P}_{nl} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)} \tilde{E} + \frac{3\varepsilon_0}{4} \tilde{\chi}^{(3)} |\tilde{E}|^2 \tilde{E} \quad (1.17)$$

où $\chi^{(n)}$ est le tenseur de susceptibilité d'ordre n et ε_0 la permittivité du vide. La fibre optique étant composée de silice fondue sous forme d'un verre amorphe, le tenseur de susceptibilité $\chi^{(2)}$, n'apparaît pas dans l'équation (1.17). En effet, la symétrie macroscopique, liée à la nature centrosymétrique du milieu, permet d'annuler ce tenseur. Le tenseur de susceptibilité d'ordre 3 sera donc responsable des effets non linéaires de plus petit ordre dans les fibres optiques. Ainsi, les impulsions injectées dans la fibre créent au sein du matériau une polarisation composée d'une partie linéaire (\tilde{P}_l), qui domine à basse puissance, et une partie non linéaire (\tilde{P}_{nl}), qui joue un rôle de plus en plus important à mesure que la puissance des impulsions augmente. La polarisation est étroitement liée à l'indice de réfraction associé à l'onde, à travers la relation $\tilde{D} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \tilde{E} = \varepsilon_0 \tilde{E} + \tilde{P}$, qui conduit à :

$$n^2 \left(\omega, |\tilde{E}|^2 \right) = \varepsilon_r = 1 + \tilde{\chi}^{(1)} + \tilde{\varepsilon}_{nl} \quad (1.18)$$

où $\tilde{\varepsilon}_{nl} = 3\tilde{\chi}^{(3)} |\tilde{E}|^2 / 4$ représente la contribution de la non linéarité à la constante diélectrique $\tilde{\varepsilon}_r$. L'indice de réfraction se composera donc d'une partie linéaire que nous noterons

$$n_0 = \sqrt{1 + \tilde{\chi}^{(1)}} \quad (1.19)$$

et d'une partie non linéaire Δn_{nl} tel que $n^2 = n_0^2 + \tilde{\varepsilon}_{nl} = (n_0 + \Delta n_{nl})^2 \simeq n_0^2 + 2n_0 \Delta n_{nl}$.

On déduit alors

$$\Delta n_{nl} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{nl}}{2n_0}, \quad (1.20)$$

et finalement

$$n \left(\omega, |\tilde{E}|^2 \right) = n_0(\omega) + n_2 |\tilde{E}|^2 \quad (1.21)$$

où $n_2 = 3\tilde{\chi}^{(3)} / 8n_0$ représente le coefficient de l'indice non linéaire. L'indice de réfraction peut également s'exprimer en fonction de l'intensité de l'onde I par

$$n(\omega, I) = n_0(\omega) + n'_2 I \quad (1.22)$$

où $I = \varepsilon_0 c n_0 |\tilde{E}|^2 / 2 = \alpha |\tilde{E}|^2$, avec $\alpha = \varepsilon_0 c n_0 / 2$ et $n'_2 = n_2 / \alpha \simeq 2.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$ pour une fibre standard de longueur d'onde voisine de $1.5 \mu\text{m}$. L'intensité s'exprime

en Wm^{-2} . De manière générale, la propriété de certains matériaux diélectriques tels que la fibre optique, d'acquérir un indice de réfraction qui dépend linéairement de l'intensité de l'onde est connue sous le nom d'effet *Kerr optique*. Cette dépendance sera toute fois responsable de bien de phénomènes au sein des fibres optiques, connus sous le nom d'effets non linéaires [37], parmi lesquels on peut citer l'auto-modulation de phase, l'instabilité modulationnelle, le mélange à quatre ondes, etc.

1.3.3 Expression de la puissance optique

Considérons une fibre optique non biréfringente, dans la base des modes propres de polarisation rectiligne, le champ électrique de l'impulsion véhiculé peut se mettre sous la forme

$$E = E_0 \exp [i (kZ - \omega_0 T)] + cc \quad (1.23)$$

où ω_0 est la fréquence de transmission (porteuse), k le module du vecteur d'onde et cc désigne le complexe conjugué. L'une des méthodes permettant le traitement théorique de la dynamique des impulsions lumineuses dans une fibre optique consiste à décomposer l'amplitude du champ impulsionnel comme suit

$$E_0 = CA(Z, T) \psi(x, y). \quad (1.24)$$

$A(Z, T)$ et $\psi(x, y)$ représentent respectivement l'enveloppe de l'onde et la distribution transverse du champ électrique impulsionnel. C est une constante qui sera définie dans la suite. L'obtention de $\psi(x, y)$ se fait en approximant la polarisation par sa contribution linéaire ($P_{nl} = 0$). Dans ce cas l'équation (1.13) devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{n^2 \omega_0^2}{c^2} - k^2 \right) \psi = 0. \quad (1.25)$$

La résolution de l'équation (1.25) conduit aux modes propres de propagation de la lumière dans la fibre. Chaque mode correspondant à une distribution transverse particulière du champ électrique. Il existe une longueur d'onde, qualifiée de longueur d'onde de coupure λ_c , au-delà de laquelle un seul mode (le mode fondamental LP_{01}) peut se propager. Le champ de ce mode est voisin d'un mode Gaussien, avec une amplitude maximale au centre du cœur de la fibre. La puissance optique de l'onde

s'écrit

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha C^2 |A|^2 |\psi|^2 dx dy = \alpha C^2 |A|^2 N \quad (1.26)$$

avec

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx dy. \quad (1.27)$$

En posant $C = 1/\sqrt{\alpha N}$ on obtient $P = |A|^2$; autrement dit, le facteur de normalisation est choisi de telle sorte que $|A|^2$ donne directement la puissance optique de l'impulsion exprimée en Watts. Pour décrire complètement l'impulsion, il faut déterminer l'équation de propagation de l'enveloppe de l'onde.

1.3.4 Equation de Schrödinger Non Linéaire (ESNL)

L'évolution du profil temporel d'une impulsion lumineuse dans la fibre optique est décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire (NLSE) [33]. Pour établir cette équation, nous considérons une impulsion lumineuse se propageant suivant l'axe Z avec une fréquence porteuse ω_0 , de nombre d'onde k_0 et une enveloppe $A(Z, T)$, dans un milieu diélectrique, en présence de l'effet Kerr. Plaçons nous dans le cas pratique où l'enveloppe de l'impulsion varie lentement par rapport aux variations rapides spatio-temporelles de l'onde porteuse (k_0, ω_0) . Il est alors possible de développer en série de Taylor autour de la fréquence ω_0 , le nombre d'onde $k = n\omega/c = k(\omega, |E_0|^2)$.

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} + \left(\frac{\partial k}{\partial |E_0|^2} \right)_{|E_0|=0} |E_0|^2. \quad (1.28)$$

En posant $K = k - k_0$, $\Omega = \omega - \omega_0$, $\beta_1 = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}$ et $\beta_2 = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=\omega_0}$ on obtient la relation de dispersion non linéaire de l'enveloppe

$$K = \beta_1 \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 + Q |E_0|^2 \quad (1.29)$$

où $Q = \left(\frac{\partial k}{\partial |E_0|^2} \right)_{|E_0|=0}$ représente le coefficient de non linéarité. Sachant que $n = n_0 + n_2 |E_0|^2$, il vient que $Q = n_2 \omega / c$. En utilisant une méthode basée sur la transformée de Fourier, dans laquelle K est remplacé par l'opérateur de dérivation spatial $-i \frac{\partial}{\partial Z}$ et Ω par l'opérateur de dérivation temporel $i \frac{\partial}{\partial T}$, la relation de dispersion ci-dessus

dans l'espace spatio-temporel se met sous la forme

$$-i \frac{\partial}{\partial Z} = i\beta_1 \frac{\partial}{\partial T} - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + Q |E_0|^2. \quad (1.30)$$

En appliquant cet opérateur à E_0 , on obtient l'ESNL qui gouverne l'évolution spatio-temporelle de l'enveloppe d'une impulsion dans un milieu diélectrique à savoir

$$-i \frac{\partial E_0}{\partial Z} = i\beta_1 \frac{\partial E_0}{\partial T} - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 E_0}{\partial T^2} + Q |E_0|^2 E_0. \quad (1.31)$$

D'autre part, il est pratique d'utiliser un système de coordonnées qui se déplace à la même vitesse de groupe ($v_g = 1/\beta_1$) que l'impulsion. Les variables spatio-temporelles s'écrivent alors $z = Z$ et $t = T - z/v_g$. En substituant ces expressions dans la relation (1.31) ainsi que E_0 par $E_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha N}} A(z, t) \psi(x, y)$, puis en multipliant les deux membres par ψ^* et en intégrant sur la section transversale de la fibre, on obtient l'ESNL de l'onde enveloppe

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\gamma |A|^2 A. \quad (1.32)$$

γ est le coefficient de non linéarité défini par

$$\gamma = \frac{Q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y)|^4 dx dy}{\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y)|^2 dx dy \right)^2} = \frac{n_2 \omega_0}{\alpha c A_{eff}} = \frac{n_2' \omega_0}{\alpha A_{eff}} \quad (1.33)$$

$A_{eff} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y)|^2 dx dy \right)^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y)|^4 dx dy$ représente l'aire effective de la section transversale et β_2 le coefficient de dispersion d'ordre deux. L'expression (1.32) est l'ESNL dans laquelle les pertes de la fibre ainsi que tous les termes d'ordre supérieur qui décrivent des effets tels que les effets de dispersion d'ordre supérieur à deux, la diffusion Raman stimulée ou l'auto-raïdissement, ont été négligés. Toutefois, cette équation peut être généralisée en incluant ces termes.

1.3.5 Régimes de propagation

Dans l'équation (1.32), le terme β_2 décrit les effets de la dispersion, tandis que γ décrit les effets de la non linéarité de la fibre sur la propagation des impulsions. Les différents régimes de propagation apparaissent clairement lorsqu'on utilise des

échelles normalisées. Posons $\tau = t/\Delta t_0$ (temps normalisé), où Δt_0 désigne la largeur de l'impulsion, et $u(z, \tau) = A(z, \tau)/\sqrt{P_0}$ (amplitude normalisée), où P_0 désigne la puissance crête de l'impulsion. L'ESNL devient

$$\frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\text{sign}(\beta_2)}{2L_d} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{i}{L_{nl}} |u|^2 u, \quad (1.34)$$

où

$$L_d = \Delta t_0^2 / |\beta_2| \quad (1.35)$$

représente *la longueur de dispersion* c'est-à-dire, la distance à partir de laquelle les effets dispersifs commencent à devenir importants, et

$$L_{nl} = 1/\gamma P_0 \quad (1.36)$$

représente *la longueur de non linéarité* c'est-à-dire, la distance à partir de laquelle les effets non linéaires commencent à devenir significatifs. Ces longueurs caractéristiques fournissent les estimations pour lesquelles les effets dispersifs ou non linéaires deviennent importants.

Selon la longueur L de la fibre et les valeurs de L_d et L_{nl} , on distingue quatre principaux régimes de propagation :

1.3.5.1 Régime linéaire non dispersif

Lorsque $L \ll L_{nl}$ et $L \ll L_d$, aucun des effets dispersifs ou non linéaires ne joue un rôle significatif durant la propagation. La fibre est donc passive dans ce régime, et l'impulsion conserve sa forme durant la propagation. On a

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \rightarrow u(z, \tau) = u(0, \tau). \quad (1.37)$$

1.3.5.2 Régime dispersif

Lorsque $L \ll L_{nl}$ et $L \geq L_d$, le terme de non linéarité devient négligeable, l'évolution des impulsions est alors gouvernée par la dispersion. L'équation (1.34) devient

$$\frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\text{sign}(\beta_2)}{2L_d} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.38)$$

et de plus,

$$\frac{L_d}{L_{nl}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1. \quad (1.39)$$

Ce régime est caractérisé par un élargissement temporel de l'impulsion.

1.3.5.3 Régime non linéaire

Lorsque $L \ll L_d$ et $L \geq L_{nl}$, la dispersion est négligeable. L'ESNL (1.34) devient

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{i}{L_{nl}} |u|^2 u. \quad (1.40)$$

Il y a conservation de la forme temporelle de l'impulsion, mais changement de la phase (auto-modulation de phase).

1.3.5.4 Régime soliton

Lorsque $L \geq L_d \simeq L_{nl}$, les effets de la dispersion et de la non-linéarité agissent simultanément et se neutralisent. Les impulsions sont alors gouvernées par l'ESNL (1.34) et sont stables au cours de la propagation : ce sont des *solitons*.

1.3.6 Effet de la dispersion

Pour une longueur de fibre L telle que $L \ll L_{nl}$ et $L \geq L_d$, on peut considérer que l'onde ne subit que l'effet de la dispersion de la vitesse de groupe. Dans ce cas, la propagation de l'impulsion est régie par l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (1.41)$$

dont la solution générale est de la forme

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, t') \exp(-i\omega(t - t')) \exp\left(\frac{i}{2} \omega^2 G(z)\right) dt' d\omega, \quad (1.42)$$

où $A(0, t')$ représente l'enveloppe de l'impulsion initiale et $G(z) = \int_{z_0}^z \beta_2(z') dz'$ la dispersion cumulée. La relation (1.42) donne la dynamique d'une impulsion qui se propage dans un milieu purement dispersif. Cette dynamique peut être illustrée par deux exemples de profils de dispersions différents :

- Cas des fibres à dispersion uniforme

Dans ce cas, la dispersion de la vitesse de groupe est constante et la dispersion cumulée vaut $G(z) = \beta_2 z$. Considérons une impulsion de forme gaussienne donc le champ initial est

$$A(0, t) = u_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2T_0^2}\right), \quad (1.43)$$

avec T_0 la demi-largeur à $1/e$ de l'intensité reliée à sa largeur à mi-hauteur (FWHM) par $T_{fwhm} = 2\sqrt{\ln(2)}T_0 \simeq 1.665T_0$. En substituant cette expression de $A(0, t)$ dans la relation (1.42) on obtient

$$A(z, t) = \frac{u_0}{\left(1 + (T_0^{-2}\beta_2 z)^2\right)^{1/4}} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_0^2\left(1 + (T_0^{-2}\beta_2 z)^2\right)} + \frac{i\beta_2 z t^2}{2T_0^4\left(1 + (T_0^{-2}\beta_2 z)^2\right)} - \frac{i}{2} \arctan(T_0^{-2}\beta_2 z)\right). \quad (1.44)$$

La largeur de l'impulsion en tout point z est donnée par

$$\frac{T(z)}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{(\beta_2 z)^2}{T_0^4}}. \quad (1.45)$$

Cette relation montre que dans une fibre à dispersion uniforme, la dispersion de la vitesse de groupe provoque un élargissement temporel de l'impulsion indépendamment du signe de β_2 . Cet élargissement est accompagné d'une diminution de l'amplitude de l'impulsion assurant ainsi la conservation de l'énergie. On peut aussi observer de la relation (1.44) qu'au cours de la propagation, l'impulsion acquiert une phase quadratique ϕ_d tel que

$$\phi_d(z, t) = \frac{\beta_2 z t^2}{2T_0^4\left(1 + (T_0^{-2}\beta_2 z)^2\right)} - \frac{1}{2} \arctan(T_0^{-2}\beta_2 z). \quad (1.46)$$

La fréquence instantanée sous l'enveloppe de l'impulsion s'écarte donc de la fréquence de la porteuse selon une quantité qui varie linéairement le long de l'impulsion et qui augmente avec la distance de propagation. Cette quantité est le chirp ou glissement de fréquence définie par

$$\delta\omega = -\frac{\partial\phi_d}{\partial t}. \quad (1.47)$$

L'élargissement induit par la dispersion s'explique par le fait que les différentes composantes spectrales de l'impulsion se déplacent à des vitesses de groupe différentes par le biais de la dispersion chromatique [33, 38]. En effet, en régime de dispersion normale, les composantes de hautes fréquences qui apparaissent à l'avant de l'impulsion vont se déplacer plus vite que celles de basses fréquences tandis qu'en régime de dispersion anormale, ce sont les composantes de basses fréquences qui apparaissent à

l'avant de l'impulsion et qui vont se déplacer plus vite que celles de hautes fréquences. Il s'en suit un élargissement de l'impulsion.

- Cas des fibres à gestion de dispersion

Une liaison à fibre à gestion de dispersion est obtenue en alternant des segments de fibre à dispersion respectivement normale et anormale. Pour comprendre l'évolution d'une impulsion dans un tel système, il suffit de considérer une impulsion chirpée injectée dans une fibre à dispersion uniforme :

$$A(0, t) = u_0 \exp \left(-\frac{t^2}{2T_0^2} (1 - i\delta\omega_0) \right), \quad (1.48)$$

où $\delta\omega_0$ représente la modulation de phase initiale. Cela revient à considérer une impulsion qui s'est propagée dans un premier tronçon avec une dispersion β_{21} . Elle a donc déjà acquis un chirp $\delta\omega_0$ proportionnel à β_{21} au moment où elle pénètre dans le second tronçon qui possède une dispersion β_{22} . Nous considérons ici l'évolution de l'impulsion dans le second tronçon de fibre. Les lois d'évolution de la largeur de l'impulsion et du chirp se modifient de la manière suivante :

$$\frac{T(z)}{T_0} = \left[\left(1 + \frac{\delta\omega_0 F(z)}{T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{F(z)}{T_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.49)$$

avec $F(z) = \beta_{22}z$.

La présence du chirp initial introduit le terme $F(z)\delta\omega_0$ par rapport à la relation (1.45) dans la loi de l'élargissement temporel de l'impulsion. C'est donc du signe de ce terme que dépendra la largeur de l'impulsion. En effet, si les deux tronçons ont des dispersions positives, l'impulsion s'élargira plus vite qu'une impulsion non initialement chirpée. Dans le cas où ces dispersions sont de signes opposés, la largeur diminue et l'impulsion se rétrécit. C'est sur ce comportement que reposent les fibres à gestion de dispersion. Dans une ligne à gestion de dispersion, $F(z)\delta\omega_0$ prend alternativement des valeurs positive et négative, ce qui entraîne un élargissement et une compression de l'impulsion au rythme de l'alternance des segments de fibre de dispersion positive et négative. On dit que l'impulsion respire. La phase quant à elle devient

$$\phi_d = \frac{(\delta\omega_0 (T_0^2 + \delta\omega_0 F(z)) + F(z))}{2 \left((T_0^2 + \delta\omega_0 F(z))^2 + F(z)^2 \right)} t^2 - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{F(z)}{T_0^2 + \delta\omega_0 F(z)} \right). \quad (1.50)$$

1.3.7 Auto-modulation de phase

Dans une fibre de longueur L , lorsque $L \ll L_d$ et $L \geq L_{nl}$, les effets de la dispersion sont négligeables. L'impulsion ne subit que l'effet de la non linéarité. L'équation de Schrödinger prend la forme

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma |A|^2 A \quad (1.51)$$

et admet pour solution

$$A(z, t) = A(0, t) \exp(i\gamma |A(0, t)|^2 z), \quad (1.52)$$

avec

$$|A(z, t)|^2 = |A(0, t)|^2. \quad (1.53)$$

Les relations (1.52) et (1.53) montrent que l'effet Kerr à lui seul ne modifie pas le profil temporel de l'impulsion. En revanche cet effet provoque une variation de la phase de l'impulsion. Autrement dit, l'effet Kerr conduit à un déphasage non linéaire $\phi_{nl} = \gamma |A(0, t)|^2 z$ qui dépend du profil et de la puissance crête de l'impulsion initiale, et augmente linéairement avec la distance de propagation. Le déphasage est maximal au centre de l'impulsion ($\phi_{nl}^{max} = \gamma P_0 z$ avec $P_0 = |A(0, t)|^2$). Ce régime donne lieu en général à un élargissement spectral de l'impulsion, qui résulte de la génération des photons de fréquences inférieures et supérieures à la fréquence de transmission ω_0 , respectivement sur les fronts montant et descendant de l'impulsion. L'impulsion acquiert donc un chirp défini par

$$\delta\omega = -\frac{\partial \phi_{nl}}{\partial t} = -\frac{\partial |A(0, t)|^2}{\partial t}. \quad (1.54)$$

La génération de nouvelles fréquences provoque un élargissement spectral qui peut être préjudiciable aux systèmes de communication.

1.3.8 Les solitons optiques

Un soliton optique est une onde lumineuse solitaire qui est capable de se propager sur de longues distances sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif.

1.3.8.1 Le soliton conventionnel

Les solitons conventionnels se manifestent dans des systèmes conservatifs. Leur origine physique est basée sur la compensation qui a lieu au cours de la propagation entre l'auto-modulation de phase et la dispersion d'ordre deux. Toutefois, la combinaison de l'auto-modulation de phase et la dispersion peut conduire à des phénomènes différents selon le régime de dispersion considéré. Sachant que le signe du chirp induit par la dispersion dépend du signe de celle-ci, deux situations peuvent se présenter. Lorsque la dispersion est normale, c'est-à-dire $\beta_2 > 0$, les chirps induits par la dispersion et la non linéarité sont de même signe et s'additionnent, ce qui donne lieu à un élargissement de l'impulsion plus important que celui occasionné par chacun des deux effets agissant seul. En régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$), les chirps générés par l'auto modulation de phase et la dispersion sont de signes opposés et se neutralisent totalement lorsque $L_d = L_{nl}$. Cet équilibre est obtenu pour une impulsion de forme sécante hyperbolique. Cette impulsion qui se propage sans chirp est appelé *soliton conventionnel*. L'équation (1.34) appartient à la classe d'équations non linéaires intégrables et peut être exactement résolue par la méthode de la diffusion inverse [33] pour un état initial arbitraire. L'expression analytique du soliton est une sécante hyperbolique

$$A(z, t) = \sqrt{P_0} \operatorname{sech} \left(\frac{t}{T_0} \right) \exp \left(i \frac{P_0 z}{2\gamma} \right), \quad (1.55)$$

avec

$$\frac{L_d}{L_{nl}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} = 1. \quad (1.56)$$

1.3.8.2 Les pertes et le soliton moyen

En pratique, la compensation exacte de la dispersion par la non linéarité est impossible à réaliser en raison de la présence d'effets fortement perturbateurs, tels que les pertes, qui ne sont pas prises en compte dans l'ESNL standard et qui modifient considérablement l'importance de la non linéarité au cours de la propagation. Les effets non linéaires étant dépendants de l'intensité de l'impulsion, la présence des pertes va amoindrir l'auto-modulation de phase et briser l'équilibre entre les effets linéaire et non linéaire (les solitons s'adaptent à la diminution de la puissance crête en s'élargis-

sant de plus en plus). Pour éviter que le soliton ne s'élargisse trop ou ne disparaisse, faute de puissance, on dispose périodiquement le long des lignes de transmission des amplificateurs erbium, qui augmentent son amplitude, et compriment la largeur de l'impulsion par un mécanisme analogue à celui des pertes. Ces amplificateurs, espacés les uns des autres d'une distance Z_a , compensent exactement les pertes de la ligne sur chaque pas d'amplification, par un gain en puissance optique

$$G = \exp(\alpha Z_A). \quad (1.57)$$

L'impulsion n'étant plus rigoureusement un soliton, on introduit la notion de *soliton moyen* qui est une impulsion fictive dotée des mêmes propriétés qu'un soliton théorique se propageant sur une ligne conventionnelle ayant comme caractéristiques les valeurs moyennes de celles de la ligne réelle. L'approximation du soliton moyen est valable lorsque le pas d'amplification est plus petit que la longueur de dispersion. Cette condition se ramène à $L_d > 2Z_A$.

1.3.8.3 Le soliton à gestion de dispersion

Principalement destiné aux transmissions à très longues distance (transocéaniques), le soliton à gestion de dispersion est une impulsion ultra-brève capable de se propager sur plusieurs milliers de kilomètres dans une ligne à fibre optique à compensation de la dispersion [39]. Encore appelé soliton DM (Dispersion Managed Soliton), c'est une impulsion dotée de la propriété de retour périodique à sa configuration initiale après une distance qui doit être une petite fraction de la distance totale de la liaison. Le soliton DM est généralement transmis dans une ligne dont le motif élémentaire est une carte de dispersion (map) symétrique. Une ligne à compensation de la dispersion standard est constituée par la répétition d'un motif élémentaire de dispersion. Chaque motif est constitué d'une juxtaposition de sections de fibre à dispersion respectivement normale et anormale. Un tel système est caractérisé par :

- a) Les paramètres β_{21} et β_{22} des sections de fibre anormale et normale respectivement,
- b) l'écart de Dispersion $\Delta\beta_2 = \beta_{22} - \beta_{21}$ entre les deux types de fibres,
- c) les longueurs L_1 et L_2 des segments de fibre, et la longueur $L = L_1 + L_2$ de chaque motif élémentaire de dispersion (map),

d) la dispersion moyenne de la ligne $\beta_{2m} = (\beta_{21}L_1 + \beta_{22}L_2) / L$ et se présente comme le montre la Figure (1.4).

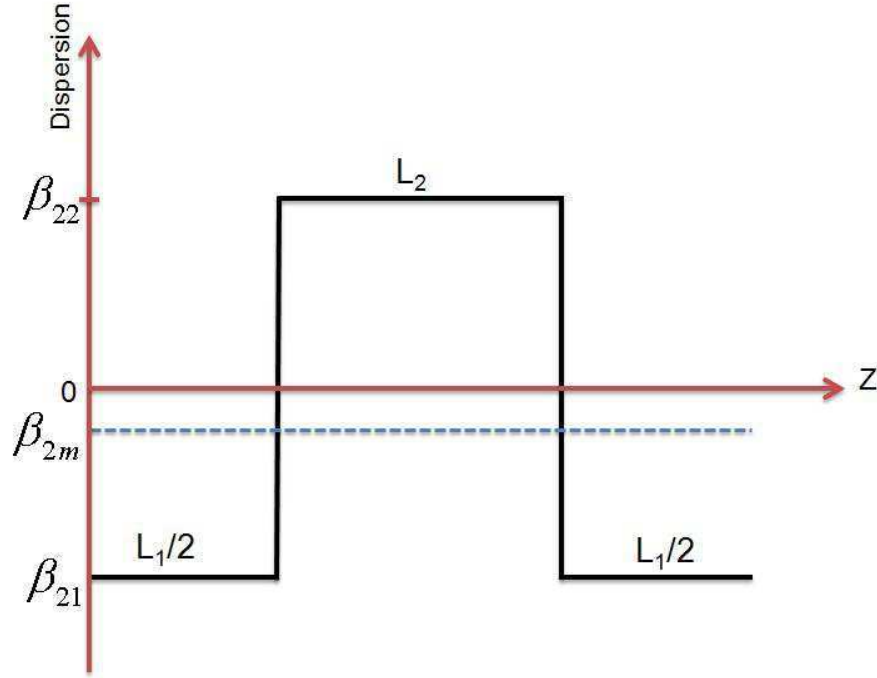


FIGURE 1.4 Représentation schématique d'un motif élémentaire de dispersion (map).

Les systèmes à gestion de dispersion n'ont pas de solution analytique. Toutefois, leur profil peut être obtenu numériquement.

Chapitre 2

Théorie des coordonnées collectives pour les impulsions lumineuses dans les fibres : Méthode des opérateurs de projection réduits

2.1 Introduction

La propagation des impulsions lumineuses dans les guides d'onde diélectriques met en jeu une multitude de phénomènes linéaires et non linéaires tels que la dispersion chromatique, le mélange à quatre ondes, la diffusion Raman, l'auto-modulation de phase, ou l'auto-raïdissement des impulsions [40]. Les effets combinés de ces phénomènes conduisent à des processus dynamiques complexes, qui sont souvent difficiles à comprendre par une analyse directe du profil du champ électrique associé à l'impulsion. Pour faciliter la compréhension de ces processus dynamiques, on s'efforce parfois de ramener la dynamique de l'impulsion lumineuse (qui en principe implique un très grand nombre de degrés de liberté) à celui d'un système mécanique beaucoup plus simple, doté de quelques degrés de liberté [41, 42]. A chaque degré de liberté du système mécanique, est alors associé un paramètre appelé *coordonnée collective (CC)*, qui est choisi pour représenter de manière fiable un paramètre majeur de l'impulsion (position temporelle, largeur, amplitude, chirp, etc). L'aboutissement de cette ap-

proche, que l'on qualifie d'approche de *coordonnées collectives* (*CCs*), est subordonné à la possibilité de transformer l'équation de Schrödinger non linéaire (qui gouverne l'évolution spatio-temporelle du champ impulsionnel), en un système d'équations différentielles ordinaires gouvernant l'évolution des paramètres de l'impulsion au cours de la propagation dans la fibre. L'approche des coordonnées collectives est particulièrement utile dans des situations où l'on ne dispose pas de solution analytique exacte de l'équation de propagation. Un des domaines de l'optique où l'approche des CCs a démontré toute sa puissance, est sans doute le domaine des lignes de transmission à gestion de dispersion, où elle a été appliquée avec succès à la modélisation de la propagation à longue distance des solitons à gestion de dispersion [41, 43, 44, 45, 46]. Alors qu'un soliton conventionnel correspond à une impulsion idéale se propageant sans déformation de profil (dans une fibre idéale sans pertes) [3, 47], les solitons à gestion de dispersion exécutent de manière périodique de larges déformations de profil et de phase, dans des lignes constituées d'une concaténation de tronçons de fibres à dispersion alternativement positive et négative. Cette dynamique interne du soliton à gestion de dispersion augmente considérablement la complexité du traitement théorique. Une situation similaire de propagation d'impulsion accompagnée d'une forte dynamique interne est largement présente dans les lasers à fibres, où elle est induite par les processus de pertes intra cavité, d'amplification et par une éventuelle gestion de la dispersion intra-cavité [48, 49, 50, 51]. Pour ce type de systèmes physiques pratiques, où l'impulsion exécute une forte dynamique interne, il n'existe dans la littérature aucune expression analytique exacte décrivant rigoureusement l'évolution du profil temporel de l'impulsion. Plusieurs travaux antérieurs ont révélé des conditions de propagation (dans des lignes de transmission et des lasers à fibre à modes bloqués) où la dynamique lente de l'impulsion correspond à un profil temporel proche d'une sécante hyperbolique [49, 50, 52]. Pour ces systèmes sujets à une forte dynamique interne, les techniques d'optimisation, de même que la conception du système, reposent fondamentalement sur des procédures numériques, qui permettent de résoudre les équations modélisant la propagation du champ impulsionnel dans le système. Comme ces procédures numériques ne fournissent que très peu de détails sur la dynamique interne de l'impulsion, elles sont parfois complétées par des

approches analytiques ou semi-analytiques, que l'on qualifie d'approches de "*coordonnées collectives*" [26, 41, 44, 53, 54, 55, 56, 57]. Les techniques de CCs permettent alors d'obtenir l'évolution des paramètres de l'impulsion (position temporelle, largeur, amplitude, fréquence, etc) au cours de sa propagation. Parmi les techniques de coordonnées collectives les plus utilisées figure la méthode des opérateurs de projection (OP), qui a été élaborée par Boesch et *al* en Physique de la matière condensée [30], puis utilisé dans les systèmes de Sine-Gordon [21, 58, 59] avant d'être appliquée au traitement de la dynamique des impulsions lumineuses dans les fibres optiques [41]. Dans cette approche, les CCs sont introduites dans le traitement théorique par le biais d'une fonction d'essai, appelée fonction *ansatz*, qui est choisie pour représenter au mieux le profil exact de l'impulsion. L'écart entre le profil exact (solution exacte de l'équation de Schrödinger non linéaire) et la fonction *ansatz* est appelé "*champ résiduel*". La méthode de l'opérateur de projection consiste à imposer des contraintes sur les CCs de manière à minimiser l'énergie du champ résiduel [30, 41]. Cette approche équivaut à appliquer un OP directement sur l'équation de Schrödinger non linéaire. Mathématiquement, l'OP est un vecteur dont les éléments sont les fonctions propres des modes de vibration associés aux CCs. La procédure d'application de l'OP conduit, après d'importantes manipulations algébriques, à des équations matricielles qu'il faut résoudre pour obtenir les expressions analytiques des vitesses de variation des CCs. La résolution de ces équations matricielles est une étape décisive, qui devient insurmontable lorsque le nombre de CCs est trop élevé. Un exemple typique de situation où une application rigoureuse des approches de CCs (y compris la méthode des OP) est pratiquement impossible en raison d'un nombre trop élevé de CCs, est le processus d'interaction entre plusieurs impulsions lumineuses. En pratique, pour traiter les problèmes d'interaction, on s'efforce généralement de réduire considérablement le nombre de CCs en se restreignant à des situations idéales où les impulsions en interaction ne diffèrent que vis à vis de quelques paramètres majeurs (tels que la position, et fréquence) tandis que tous autres paramètres (chirp, largeur, amplitude, etc) sont supposés rigoureusement identiques pour toutes les impulsions [41]. Dans ce contexte, il est clair qu'une amélioration des méthodes de CCs est nécessaire pour surmonter la complexité des opérations algébriques qui limite sévèrement la com-

préhension que l'on peut avoir de certains types de comportements dynamiques des impulsions lumineuses dans les guides d'onde diélectriques non linéaires.

Dans ce travail, nous proposons une modification substantielle de la méthode de l'opérateur de projection (OP) présentée dans la référence [41], afin de réduire drastiquement la complexité des opérations algébriques requises pour obtenir les équations d'évolution des CCs. Dans la référence [41], l'OP est construit à partir d'une fonction ansatz incluant l'amplitude et la phase de l'impulsion. Nous montrons dans ce travail qu'une amélioration substantielle de l'efficacité de l'opération de projection est obtenue en traitant séparément l'évolution de la phase et celle de l'amplitude de l'impulsion, c'est-à-dire, en utilisant deux opérateurs de projection distincts (l'une pour l'amplitude, et l'autre pour la phase). Cette nouvelle paire d'opérateurs, que nous appelons "*opérateurs de projection réduits*" (OPR), a pour principale vertu d'avoir des dimensions réduites de moitié par rapport à celle de l'opérateur unique englobant l'amplitude et la phase de l'impulsion.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section II nous présentons la procédure de mise en œuvre de l'approche des CCs utilisant l'opérateur de projection conventionnel (OPC) basé sur une fonction ansatz incluant l'amplitude et la phase de l'impulsion. Dans la section III nous présentons l'approche des CCs utilisant les OPR. Dans la section IV nous illustrons l'application des OPR sur le problème d'émission de rayonnement par une impulsion lumineuse. Dans la section V nous concluons ce chapitre.

2.2 Equations d'évolution des coordonnées collectives

On peut modéliser de manière réaliste la propagation des impulsions lumineuses dans un guide d'onde diélectrique non linéaire par l'ESNL généralisée qui suit :

$$\psi_z = V(\psi) \equiv -i\frac{\beta_2}{2}\psi_{tt} + i\gamma|\psi|^2\psi - \frac{\alpha}{2}\psi + \left(\sqrt{G} - 1\right) \times \sum_{n=1}^N \delta(z - nZ_A)\psi \quad (2.1)$$

où ψ désigne le champ électrique de l'impulsion (ou du train d'impulsions) présent dans le système, δ , β_2 , γ et α désignent respectivement la fonction delta de Dirac, les coefficients de dispersion, de non linéarité, et d'atténuation linéaire. L'équation (2.1) peut décrire aussi bien la propagation dans une ligne à dispersion constante que dans

une ligne constituée d'une concaténation de tronçons de fibre ayant alternativement des coefficients de dispersion de signes positif et négatif. La ligne peut être dotée d'amplificateurs régulièrement espacés d'une distance Z_A , afin de compenser les pertes linéaires. Dans l'équation (2.1) le paramètre $G = \exp(\alpha Z_A)$ désigne le gain de chaque amplificateur. Pour mettre en lumière les principes généraux de l'approche de des opérateurs de projection conventionnels (OPC) introduits dans la référence [41], nous avons choisi d'examiner la propagation d'une impulsion dans le système décrit par l'équation (2.1), en nous focalisant sur l'évolution de l'impulsion en tout point z situé entre deux amplificateurs consécutifs. Conséquemment, dans la suite de ce chapitre, par souci de simplicité, nous ne ferons plus apparaître explicitement le dernier terme du membre de droite de l'équation (2.1), car ce terme n'agit que de manière ponctuelle aux points d'amplification.

L'idée générale dans l'approche des CCs est d'associer de nouvelles variables (appelées CCs) à des grandeurs physiques auxquelles on s'intéresse, et d'obtenir leurs équations de mouvement. A cette fin, on décompose le champ impulsionnel ψ de la manière suivante :

$$\psi(z, t) = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, t) + q(z, t) \quad (2.2)$$

où la fonction ansatz f est choisie pour être la meilleure représentation du profil temporel de l'impulsion, et q est le champ résiduel tel que la somme de f et q soit la solution exacte de l'équation (2.1). Notons que les fonctions ansatz les plus couramment utilisées pour représenter les impulsions lumineuses dans les fibres optiques ont un profil de forme Gaussienne ou sécante hyperbolique [41, 44, 54, 55, 26]. Mais tout autre type de profil peut être utilisé à condition que le champ résiduel correspondant ait une amplitude suffisamment petite par rapport à celle de la fonction ansatz. Le simple fait de décomposer le champ ψ comme indiqué dans l'équation (2.2) a pour conséquence de remplacer le système original (décrit par ψ) par un système équivalent (décrit par q , et les N CCs) dont l'espace de phase est plus large que celle du système original. En d'autres termes, substituer simplement $\psi = f + q$ dans l'équation (2.1) a comme conséquence d'introduire dans le système équivalent des solutions incompatibles avec le système initial. Il faut donc introduire des contraintes dans le système afin d'éliminer les solutions indésirables et ramener l'espace de phase du sys-

tème équivalent à la même dimension que celle du système original [30]. La contrainte majeure que l'on impose au système équivalent est que les CCs n'évoluent que dans un sens (particulier) qui minimise l'énergie du champ résiduel défini par [41] :

$$\Lambda \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |q|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi - f(X_1, X_2, \dots, X_N, t)|^2 dt \quad (2.3)$$

Les équations (2.2) et (2.3) conduisent aux conditions de contraintes suivantes :

$$C_j(X_1, X_2, \dots, X_N) \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial X_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[q \wp_j] dt \simeq 0, \quad (2.4)$$

où

$$\wp_j \equiv \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.5)$$

correspond à l'OPC introduit dans la référence [41]. La procédure d'obtention des équations d'évolutions des CCs s'effectue en plusieurs étapes.

(i) La première consiste à substituer l'expression (2.2) dans l'ESNL (2.1). On obtient une équation d'évolution où le champ résiduel est fortement couplé aux CCs de la manière suivante :

$$q_z + \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = V(f + q). \quad (2.6)$$

(ii) On applique l'OPC (2.5) à l'équation (2.6). Cela consiste à multiplier (2.6) par l'OPC \wp_j . Ensuite on intègre dans le temps tous les termes de l'équation résultante, et on prend la partie réelle de cette équation. Cette procédure conduit à une équation que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d[X]}{dz} = [M]^{-1} [\Pi], \quad (2.7)$$

où $[X]$ est un vecteur colonne d'éléments X_j ($j = 1, 2, \dots, N$), $[M]$ est une matrice de dimension $N \times N$, d'éléments matriciels

$$M_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[\frac{\partial f^*}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \right] dt \quad (2.8)$$

$[\Pi]$ est un vecteur colonne d'éléments

$$\Pi_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[\frac{\partial f^*}{\partial X_j} (V(f + q) - q_z) \right] dt. \quad (2.9)$$

(iii) La présence de q_z dans les équations (2.6) et (2.7) couple l'équation d'évolution des CCs à l'équation d'évolution du champ résiduel. Pour découpler l'équation d'évolution du champ résiduel de celle des CCs, on applique un second groupe de contrainte défini par

$$\frac{dC_j}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q_z \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \right] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \right] dt = 0, \quad (2.10)$$

qui impose que les premières contraintes $C_j \simeq 0$ soient satisfaites pour tout z , si elles sont initialement satisfaites. Ainsi, en appliquant les secondes contraintes, on obtient l'équation d'évolution des CCs sous la forme matricielle (2.7) où le second membre ne contient plus q_z :

$$\Pi_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[\frac{\partial f^*}{\partial X_i} V(f + q) \right] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \right] dt, \quad (2.11)$$

Les équations (2.6), (2.7) et (2.10) représentent le traitement semi analytique de l'ENSL généralisée (2.1) par l'approche de l'OPC. Ce traitement semi analytique est relativement lourd, car il requiert en réalité un volume d'opérations de calcul relativement important pour obtenir les valeurs des CCs à chaque point z . En pratique, il est beaucoup plus rapide de substituer à ce traitement semi analytique une procédure totalement numérique, qui est strictement équivalente à la résolution des équations (2.6) et (2.10), et qui est basée sur la minimisation directe de l'énergie du champ résiduel. Cette procédure consiste à résoudre numériquement l'ESNL généralisée (par la méthode de Fourier à pas divisés) pour obtenir ψ [40]. Ensuite, on applique le premier groupe de contraintes pour obtenir les CCs de manière itérative :

$$[X]_{i+1} = [X]_i - \left[\frac{\partial C}{\partial X} \right]_i^{-1} [C]_i. \quad (2.12)$$

D'autre part, l'approximation la plus utile de l'approche des CCs est l'approximation "bare" (signifiant "approximation de l'impulsion déshabillée" et faisant référence au champ impulsionnel débarrassé du champ résiduel), qui est obtenue en négligeant le champ résiduel. Cela revient à poser $q = 0$ dans l'équation (2.11), ce qui entraîne une simplification considérable de cette équation.

Mais le point le plus important à noter ici est le suivant : Les étapes décisives dans la résolution des équations (2.7) et (2.12) sont des opérations d'inversion matricielle

$([M]^{-1}, [\partial C / \partial X]^{-1})$. Cette étape est cruciale pour obtenir les expressions analytiques des vitesses de variation des CCs en fonction des paramètres du guide d'onde. En particulier, l'opération d'inversion matricielle $[M]^{-1}$ de manière purement analytique n'est possible que si le nombre de CCs n'est pas très élevé. On peut facilement apprécier l'ampleur de cette difficulté dans les calculs réalisés dans l'annexe B de la référence [41], sur le traitement de l'interaction de deux impulsions lumineuses. Dans la prochaine section, nous montrons qu'il est possible de simplifier considérablement le traitement analytique décrit ci-dessus en reformulant l'opérateur de projection de manière à diminuer sa taille.

2.3 Opérateurs de projection réduits

2.3.1 Traitement semi-analytique

L'idée fondamentale dans notre procédure de reformulation de l'opérateur de projection réside dans un traitement séparé de l'amplitude et la phase de l'impulsion. Ainsi, en posant

$$\psi = \rho \exp(i\phi), \quad (2.13)$$

puis en substituant l'expression (2.13) dans l'ESNL généralisée (2.1), et en séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient le système d'équations suivant :

$$\rho_z = \tilde{V}(\rho, \phi) = \beta_2 \rho_t \phi_t + \frac{\beta_2}{2} \phi_{tt} \rho - \frac{\alpha}{2} \rho \quad (2.14a)$$

$$\rho \phi_z = \hat{V}(\rho, \phi) = -\frac{\beta_2}{2} \rho_{tt} + \frac{\beta_2}{2} \rho \phi_t^2 + \gamma \rho^3 \quad (2.14b)$$

qui décrit la dynamique de l'impulsion entre deux amplificateurs consécutifs. Nous introduisons les CCs dans le système en décomposant l'amplitude ρ et la phase ϕ de la manière suivante :

$$\rho(z, t) = g(x_1, x_2, \dots, x_m) + \tilde{q}(z, t) \quad (2.15a)$$

$$\phi(z, t) = h(y_1, y_2, \dots, y_l) + \hat{q}(z, t) \quad (2.15b)$$

où g et h sont des fonctions ansatz représentant respectivement le profil temporel et la phase de l'impulsion. Cette définition des champs g et h fait apparaître clairement

deux groupes distincts de CCs, à savoir, le groupe (x_1, x_2, \dots, x_m) , qui permet de décrire le profil temporel de l'impulsion, alors que le groupe (y_1, y_2, \dots, y_l) sert à décrire la phase de l'impulsion, avec un nombre total de CCs qui reste égal à

$$N = m + l. \quad (2.16)$$

Les champs \tilde{q} et \hat{q} sont les champs résiduels associés respectivement à g et h tels que $\psi = \rho \exp(i\phi)$ soit la solution exacte de l'ESNL (2.1).

Notre reformulation de l'opérateur de projection s'appuie sur un argument physique important, à savoir le fait que la fonction ansatz g décrivant le profil temporel de l'impulsion ne dépend pas directement des paramètres (y_1, y_2, \dots, y_l) qui décrivent la phase de l'impulsion. Conséquemment l'absence de ϕ_z dans l'équation (2.14a), permet, après substitution de l'ansatz (2.15a) dans (2.14a), d'obtenir une équation décrivant spécifiquement l'évolution du groupe de CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) , que l'on peut mettre sous une forme analogue à celle de l'équation (2.6) :

$$\tilde{q}_z + \sum_{j=1}^m \dot{x}_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = \tilde{V}(g, \tilde{q}, h, \hat{q}) \quad (2.17)$$

L'absence du groupe de CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) dans le membre de gauche de l'équation (2.17) nous permet de définir un premier groupe d'OP spécifiquement dédiés au groupe de CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) :

$$\tilde{\wp}_j \equiv \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (2.18)$$

A ce groupe d'OP nous associons les conditions des premières et secondes contraintes qui suivent :

$$\tilde{C}_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{q} \tilde{\wp}_j dt = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d\tilde{C}_j}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{q}_z \frac{\partial g}{\partial x_j} \right] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{q} \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right] dt = 0 \quad (2.20)$$

L'application de l'OP (2.18) à l'équation (2.17) conduit au système d'équations d'évolution du groupe de CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) , que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d[x]}{dz} = [\tilde{M}]^{-1} [\tilde{\Pi}], \quad (2.21)$$

où $[x]$ est un vecteur colonne d'éléments x_j ($j = 1, m$). $[\tilde{M}]$ est une matrice de dimension $m \times m$, d'éléments matriciels

$$\tilde{M}_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dt. \quad (2.22)$$

$[\tilde{\Pi}]$ est un vecteur colonne d'éléments

$$\tilde{\Pi}_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x_i} \tilde{V}(g + \tilde{q}) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{q} \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dt. \quad (2.23)$$

Pour obtenir le système d'équations du mouvement du groupe de CCs associé à la phase de l'impulsion, il serait possible de procéder comme pour le groupe de CCs associé au profil temporel, c'est-à-dire de définir un groupe d'OP pour le groupe de CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) et l'appliquer à l'équation (2.14b). Cependant une telle procédure aurait l'énorme inconvénient d'introduire deux champs résiduels distincts \tilde{q} et \hat{q} , pour un unique champ impulsif ψ . Il est plus pertinent de définir un seul champ résiduel q . A cette fin, il est plus judicieux de décomposer le champ original ψ selon la formule (2.2), avec un ansatz \hat{f} défini à l'aide des fonctions $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $h(y_1, y_2, \dots, y_l)$ de l'équation (2.15) :

$$\hat{f} \equiv g \exp[ih]. \quad (2.24)$$

Cependant, comme les variables (x_1, x_2, \dots, x_m) et $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_m)$ sont déjà connues via l'équation (2.21), l'équation d'évolution du champ résiduel global s'obtient à partir de l'équation (2.6), qu'il convient alors de réécrire sous la forme suivante :

$$q_z + \sum_{i=1}^m \dot{y}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_i} = V(\hat{f} + q) - \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}. \quad (2.25)$$

L'absence du groupe de CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) dans le membre de gauche de l'équation (2.25) nous permet de définir un second groupe d'OP spécifiquement associés au groupe de CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) :

$$\hat{\phi}_j \equiv \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_j} = -i \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_j} \hat{f}^*. \quad (2.26)$$

A ce groupe d'OP nous associons les conditions de premières et secondes contraintes qui suivent :

$$\hat{C}_j(y_1, y_2, \dots, y_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}[q \hat{\phi}_j] dt \simeq 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{dC_j}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q_z \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_j} \right] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q \left(\sum_{i=1}^l \dot{y}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^l \dot{x}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dt = 0. \quad (2.28)$$

L'application de l'OP (2.26) à l'équation (2.25) conduit au système d'équations d'évolution du groupe de CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) , que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d[y]}{dz} = [\hat{M}]^{-1} [\hat{\Pi}], \quad (2.29)$$

où $[y]$ est un vecteur colonne d'éléments $y(j = 1, l)$. $[\hat{M}]$ est une matrice de dimension $l \times l$, d'éléments matriciels

$$\hat{M}_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[\frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_j} \right] dt. \quad (2.30)$$

$[\hat{\Pi}]$ est un vecteur colonne d'éléments

$$\hat{\Pi}_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[\frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_j} V(\hat{f} + q) \right] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q \left(\sum_{i=1}^l \dot{y}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^l \dot{x}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dt. \quad (2.31)$$

Ainsi donc, les systèmes d'équations (2.17), (2.21), (2.25), et (2.29), associés aux contraintes (2.19), (2.20), (2.27), et (2.28), représentent le traitement semi analytique complet de la dynamique impulsioneille par notre approche de CCs à l'aide des opérateurs de projection (2.18) et (2.26), que nous appellerons désormais opérateurs de projection réduits (OPR). En effet, ces deux nouveaux opérateurs ont comme principale vertu d'avoir chacun une dimension considérablement réduite ($m < N$ et $l < N$) par rapport à la dimension de l'opérateur \wp_j utilisé dans les travaux antérieurs [26, 41, 55]. Cette réduction de la taille de l'OP facilite considérablement la mise en place des équations d'évolution des CCs par voie purement analytique.

2.3.2 Minimisation directe de l'énergie du champ résiduel via les OPR

Le traitement semi analytique de la dynamique impulsioneille par l'approche des CCs incluant la résolution des équations d'évolution du champ résiduel, comme décrit dans la section précédente, est un traitement relativement lourd et très coûteux

en opérations de calcul. Ce traitement semi analytique n'est justifié que dans des situations particulières qui requièrent une analyse très fine du champ résiduel, de la structure de son équation d'évolution et de la nature des termes qui la composent. Un exemple de telles situations est l'étude du processus d'émission spontanée de rayonnement par des impulsions lumineuses se propageant dans un environnement perturbé. En dehors de ces cas particuliers, dans une grande majorité de situations pratiques, le traitement semi analytique n'est pas nécessaire, et peut être remplacé par un traitement numérique (mais complètement équivalent à la méthode semi analytique) basé sur la minimisation directe de l'énergie du champ résiduel.

Ainsi donc, la résolution du système d'équations des premières contraintes (2.19) par la procédure de minimisation de Newton-Raphson [60] peut être facilement réalisée par la procédure itérative suivante

$$[x]_{(i+1)} = [x]_{(i)} - \left[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right]_{(i)}^{-1} [\tilde{C}]_{(i)}, \quad (2.32)$$

où les éléments de la matrice $\left[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right]$ sont donnés par

$$\left[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right]_{ij} = \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial x_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{q} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right] dt. \quad (2.33)$$

où le champ résiduel $\tilde{q} = \rho - g = \sqrt{|\psi|} - g$, à chaque point z , est obtenu après résolution de l'ESNL (2.1) par la méthode de Fourier à pas divisés. Bien que l'approche numérique de minimisation du champ résiduel via les OPR soit quantitativement équivalente à l'approche semi analytique présentée dans la section précédente, il existe néanmoins une différence fondamentale entre les deux approches. En effet, les équations (2.1) et (2.32) permettent d'obtenir l'évolution du jeu de CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) sans qu'il soit nécessaire de connaître les valeurs des CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) , alors que dans l'approche semi analytique l'évolution de l'un ou l'autre des deux jeux de CCs sur chaque pas de discrétisation spatiale nécessite la connaissance des valeurs de la totalité des deux jeux de CCs. En d'autres termes, nos OPR présentent comme autre avantage par rapport aux OPC, la possibilité d'obtenir de manière sélective l'évolution du jeu de CCs que l'on désire. Dans ce contexte, il est utile de rappeler que le paramètre le plus important d'une impulsion optique est son énergie, car elle

détermine immédiatement les possibilités et domaines d'application de l'impulsion. Comme cette énergie ne dépend que du profil temporel de l'impulsion [et donc, du groupe de CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) et de \tilde{q}], on peut établir une certaine hiérarchie entre les deux groupes de CCs, et qualifier de CCs de *premier rang* le groupe (x_1, x_2, \dots, x_m) alors que le groupe (y_1, y_2, \dots, y_l) décrivant la phase peut être qualifié de CCs de *second rang*. Dans bien de situations pratiques, les CCs de premier rang sont suffisants pour obtenir un excellent aperçu du comportement de l'impulsion. Cependant, en cas de besoin, l'évolution des CCs de second rang peut s'obtenir de manière analogue à celle du groupe (x_1, x_2, \dots, x_m) . Ainsi, la résolution du système d'équations des premières contraintes (2.27) par la procédure de minimisation de Newton-Raphson [60] s'obtient facilement par la procédure itérative suivante

$$[y]_{(i+1)} = [y]_{(i)} - \left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y} \right]_{(i)}^{-1} [\hat{C}]_{(i)}, \quad (2.34)$$

où les éléments de la matrice $\left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y} \right]$ sont donnés par

$$\left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y} \right]_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left[q \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dt. \quad (2.35)$$

Dans la relation (2.35) le champ résiduel $q = \psi - \hat{f}$, à chaque point z , est obtenu après résolution de l'ESNL (2.1). Les équations matricielles (2.32) et (2.34), qui sont basées sur nos OPR, ont comme avantage d'utiliser des matrices $\left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial x} \right]$ et $\left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y} \right]$ de dimensions $(m \times m, l \times l)$ considérablement réduites par rapport à celle de la matrice $\left[\frac{\partial C}{\partial X} \right]$ $(N \times N)$ associée à l'opérateur de projection conventionnel (2.5). En d'autres termes, nos OPR permettent une réduction substantielle de la taille des opérations matricielles requises pour obtenir les valeurs des CCs par la procédure de minimisation directe de l'énergie du champ résiduel.

2.4 Approximation bare

L'une des approches de CCs les plus utiles, qui est aussi sans doute la plus utilisée en pratique, est l'approche variationnelle. Cette approche, qui est aussi connue sous l'appellation d'*approximation bare*, est obtenue en négligeant le champ résiduel. Cette approche est très appréciée pour deux raisons majeures :

(i) La première est une simplification considérable de la quantité et de la complexité des opérations de calcul nécessaires pour obtenir les CCs. Bien plus, l'utilisation de nos OPR ramène le traitement théorique à la résolution de deux systèmes d'équations [(2.21) et (2.29)] qui ont pour vertu d'utiliser des matrices de taille bien plus petite que celle du système correspondant à l'OPC (2.7). Cette réduction de la taille des matrices devrait permettre de franchir plus aisément l'étape décisive de l'inversion matricielle, qui est indispensable pour obtenir de manière explicite les formules analytiques des vitesses de variation des CCs en fonction des paramètres du système (paramètres de dispersion, non linéarité, pertes, ...)

(ii) Les expressions analytiques des vitesses de variation des CCs en fonction des paramètres du système, qui ne peuvent être obtenues (sous une forme pratiquement exploitable) que par l'approximation bare, est d'une importance cruciale dans l'interprétation du comportement de l'impulsion. En effet, l'expression analytique de la vitesse de variation d'une CC fournit immédiatement le mode d'action des phénomènes de propagation (présents dans le système) sur cette CC. La connaissance de ce mode d'action est très utile dans les travaux de conception et d'optimisation des systèmes et composants à base de fibres optiques.

Il convient cependant, de rappeler que l'approximation bare ne donne des résultats quantitativement cohérents que si la fonction ansatz représente suffisamment bien le profil temporel de l'impulsion. En d'autres termes, lorsque cette approximation est utilisée, une attention particulière doit être prise dans le choix de la fonction ansatz. On peut avoir un aperçu rapide de la différence entre l'approche des CCs basée sur les OPC et l'approche utilisant les OPR, dans le cadre de l'approximation bare. Par souci de clarté nous présenterons séparément les deux cas.

2.4.1 Approximation bare avec les OPC

Dans un système à gestion de dispersion, le profil de l'impulsion peut être relativement bien représenté par la fonction ansatz suivante :

$$f = X_1 \exp \left[-\frac{(t - X_2)^2}{X_3^2} \right] \exp \left[i \left(\frac{X_4}{2} (t - X_2)^2 + X_5 (t - X_2) + X_6 \right) \right], \quad (2.36)$$

où les CCs $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5/2\pi$ et X_6 , représentent respectivement l'amplitude, la position temporelle, la largeur, le chirp, la fréquence, et la phase de l'impulsion. En posant $q = 0$ dans l'équation (2.7), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_3}{2} & 0 & X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{X_1^2 (X_4^2 X_3^4 + 4X_5^2 X_3^2 + 4)}{2X_3} & 0 & \frac{-X_1^2 X_5 X_3^3}{4} & \frac{-X_1^2 X_4 X_3^3}{2} & -2X_1^2 X_5 X_3 \\ X_1 & 0 & \frac{3X_1^2}{2X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-X_1^2 X_5 X_3^3}{4} & 0 & \frac{3X_1^2 X_3^5}{32} & 0 & \frac{X_1^2 X_3^3}{4} \\ 0 & \frac{-X_1^2 X_4 X_3^3}{2} & 0 & 0 & \frac{X_1^2 X_3^3}{2} & 0 \\ 0 & -2X_1^2 X_5 X_3 & 0 & \frac{X_1^2 X_3^3}{4} & 0 & 2X_1^2 X_3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\alpha X_1 X_3 \\ -\beta_2 X_1^2 X_5 (12 + 3X_4^2 X_3^4 + 4X_5^2 X_3^2) \\ \frac{4X_3}{2} \frac{-\alpha X_1^2}{2} - \beta_2 X_1^2 X_4 \\ \beta_2 X_1^2 X_3 \left(-1 + X_5^2 X_3 + \frac{3X_4^2 X_3^4}{4} \right) \\ \frac{8}{16} \frac{\beta_2 X_1^2 X_4 X_5 X_3^3}{2} \\ \frac{\beta_2 X_1^2 (4 + X_4^2 X_3^2 + 4X_5^2 X_3^2)}{4X_3} + \gamma \sqrt{2} X_1^4 X_3 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

La principale difficulté dans l'équation (2.37) est l'opération d'inversion matricielle dans le membre de gauche de cette équation, qui doit être réalisée pour obtenir les expressions analytiques des vitesses de variation des CCs en fonction des paramètres du système. On obtient alors les expressions analytiques suivantes :

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{2} \beta_2 X_1 X_4 - \frac{\alpha}{2} X_1 \quad (2.38a)$$

$$\dot{X}_2 = -\beta_2 X_5 \quad (2.38b)$$

$$\dot{X}_3 = -\beta_2 X_3 X_4 \quad (2.38c)$$

$$\dot{X}_4 = -\gamma \frac{\sqrt{2} X_1^2}{X_3^2} - \frac{4\beta_2}{X_3^4} + X_4^2 \beta_2 \quad (2.38d)$$

$$\dot{X}_5 = 0 \quad (2.38e)$$

$$\dot{X}_6 = \gamma \frac{5\sqrt{2} X_1^2}{8} + \frac{\beta_2}{X_3^2} - \frac{\beta_2}{2} X_5^2. \quad (2.38f)$$

2.4.2 Approximation bare avec les OP réduits

Pour faciliter la comparaison avec l'approximation bare utilisant l'OPC, il convient ici d'utiliser la même fonction ansatz que pour le cas de l'OPC (2.36). Ainsi, pour représenter le profil temporel de l'impulsion nous choisissons la fonction

$$g = x_1 \exp \left[-\frac{(t - x_2)^2}{x_3^2} \right], \quad (2.39)$$

où les CCs X_i , $i = 1, 2, 3$ de la fonction d'essai (2.36) ont été renommés dans (2.39) afin de conserver la notation utilisée dans la section 3. En posant $q = 0$ dans l'équation (2.21), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 2x_1^2/x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & 3x_1^2/(2x_3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha x_1 x_3 \\ -2\beta_2 x_1^2 x_5/x_3 \\ -\beta_2 x_1^2 x_4 - \alpha x_1^2/2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

La petite taille des matrices de l'équation (2.40) rend sa résolution bien plus aisée que l'équation (2.37). Nous obtenons alors exactement les mêmes expressions analytiques des vitesses de variation des CCs que celles données par les formules (2.38a), (2.38b), et (2.38c), mais avec les x_j à la place de X_j , $j = 1, 2, 3$. Pour obtenir les équations de mouvement du second groupe de CCs nous choisissons l'ansatz \hat{f} sous la forme donnée par la formule (2.24), avec g définie par (2.39), et h définie par :

$$h = \frac{y_1}{2} (t - x_2)^2 + y_2 (t - x_2) + y_3 \quad (2.41)$$

où les CCs X_4, X_5 et X_6 de l'ansatz (2.36) ont été renommés respectivement y_1, y_2 et y_3 dans l'ansatz (2.41)) afin de conserver la notation utilisée dans la section 3.

En posant $q = 0$ dans l'équation (2.29), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 x_3^5 & 0 & 8x_1^2 x_3^3 \\ 0 & 16x_1^2 x_3^3 & 0 \\ 8x_1^2 x_3^3 & 0 & 64x_1^2 x_3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_2 x_1^2 x_3 (4y_2^2 x_3^2 + 3y_1^2 x_3^4 - 4) + 2\sqrt{2}\gamma x_1^4 x_3^3 \\ 0 \\ \frac{8\beta_2 x_1^2 (4 + y_1^2 x_3^4 + 4y_2^2 x_3^2 - y_2^2 x_3^2)}{x_3} + 32\sqrt{2}\gamma x_1^2 x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Comme précédemment, la résolution de cette équation nous conduit aux mêmes expressions analytiques des vitesses de variation des CCs que celles données par les formules (2.38d), (2.38e), et (2.38f), mais avec X_4 , X_5 et X_6 respectivement remplacés par y_1 , y_2 et y_3

2.4.3 Application de l'approche des OPR à l'analyse de l'émission spontanée de rayonnement

Un des phénomènes les moins bien connus de la dynamique impulsienne est l'émission spontanée de rayonnement par des impulsions affectées (à l'entrée d'un guide d'onde à fibres optiques) d'un désaccord de profil par rapport au profil de l'impulsion stationnaire dans le guide d'onde. En effet, au niveau pratique, les profils d'impulsions stationnaires de la plupart des systèmes physiques réels ne sont pas réalisables, et cela est d'autant plus vrai si l'on considère des impulsions ultra brèves. Un exemple bien connu de profil d'impulsion stationnaire pratiquement irréalisable est le profil du soliton à gestion de dispersion, qui est doté d'aspérités (qualifiées de lobes latéraux) pratiquement impossible à synthétiser avec les sources d'impulsions disponibles actuellement [44]. Une impulsion réaliste est en général plus ou moins différente de l'impulsion idéale. Cette différence donne lieu à des effets de rayonnements qui peuvent affecter sévèrement la stabilité de propagation [23, 24]. Au plan fondamental, le déclenchement du rayonnement résulte de la croissance d'une (ou plusieurs) paire de bandes latérales autour de la fréquence porteuse de l'impulsion. A ce jour, en Optique, les processus qui gouvernent la restructuration spectrale (conduisant aux bandes latérales de rayonnement) n'ont jamais été clairement identifiés. De plus, il n'existe ni méthode, ni formule analytique, ni paramètres attachés à l'impulsion ou au support physique, qui permettent de prédire l'importance d'un processus de rayonnement.

Notre objectif dans cette section n'est pas de réaliser une étude détaillée du processus de rayonnement, mais de montrer que l'approche des CCs figure parmi les outils théoriques les mieux à même de fournir les clés du progrès vers une meilleure compréhension du rayonnement, et plus particulièrement, des mécanismes physiques qui le sous-tendent

Le traitement théorique rigoureux d'un processus de rayonnement nécessite une connaissance du profil exact de l'impulsion stationnaire dans le guide d'onde, que nous noterons ici A_S . Il est très utile de noter que l'impulsion A_S ne doit en principe produire aucun rayonnement. Pour garantir la meilleure stabilité de propagation des impulsions dans un guide d'onde, en pratique on s'efforce de faire en sorte que le profil de l'impulsion qui sera injecté dans le guide, que nous noterons $u(z=0, t)$, soit le plus proche du profil temporel de l'impulsion stationnaire. Malgré tout, l'injection du champ $u(z=0, t)$ correspond à une perturbation (involontaire) du profil stationnaire par un champ de perturbation σ tel que

$$u = A_S + \sigma \quad (2.43)$$

où l'amplitude du champ de perturbation σ est en principe très faible par rapport à celle A_S . Ici, il faut noter que l'équation (2.43) n'est pas identique à l'équation (2.2), car le champ A_S n'est pas une fonction ansatz, mais un champ dont la forme dépend étroitement des paramètres physiques du guide d'onde. En substituant la relation (2.43) dans l'ESNL généralisée (2.1), nous obtenons l'équation suivante pour l'évolution du champ de perturbation :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - i \gamma |\sigma|^2 \sigma + \frac{\alpha}{2} \sigma = i \gamma (2 |A_S|^2 \sigma + A_S^2 \sigma^*) \quad (2.44)$$

où les termes d'interaction non linéaire en σ ont été négligés dans le membre de droite, et où nous avons tenu compte du fait que le champ A_S est la solution stationnaire d'ESNL :

$$\frac{\partial A_S}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_S}{\partial t^2} - i \gamma |A_S|^2 A_S + \frac{\alpha}{2} A_S = 0. \quad (2.45)$$

Ici, il est utile d'insister sur le fait que la terminologie "solution stationnaire" signifie que l'impulsion retrouve son profil d'intensité initial après chaque pas d'amplification.

Le champ de perturbation σ est constitué de deux composantes :

(i) la première est un champ localisé dans la partie centrale de l'impulsion. Nous le noterons σ_L , et nous l'appellerons champ piégé. Ce champ interagit fortement avec l'impulsion stationnaire, et modifie la dynamique interne de l'impulsion globale. Cette interaction s'accompagne d'un échange d'énergie induit par le second terme du membre de droite de l'équation (2.44), et peut entraîner l'effondrement de l'impulsion si l'amplitude initiale du champ de perturbation est trop élevée.

(ii) La deuxième composante du champ de perturbation est le rayonnement, que noterons σ_R . Ce champ interagit fortement avec l'impulsion uniquement au début de la dynamique, pendant la phase de restructuration du profil initial de l'impulsion. Cette interaction, qui s'effectue par une inter modulation de phase induite par le premier terme du membre de droite de l'équation (2.44), joue un rôle décisif dans le processus de restructuration de profil conduisant à l'émergence des bandes latérales du rayonnement. Une excellente approximation de l'équation de propagation du rayonnement s'écrit donc :

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial t^2} - i \gamma |\sigma_R|^2 \sigma_R + \frac{\alpha}{2} \sigma_R = 2i \gamma |A_S|^2 \sigma_R \quad (2.46)$$

De manière plus générale, la perturbation initiale du profil stationnaire de l'impulsion induit une multitude de phénomènes incluant les phénomènes de piégeage et de rayonnement, qui se déroulent simultanément et qui sont pratiquement impossibles à analyser à partir du champ impulsionnel global $u(z, t)$. Dans ce contexte, les équations de la dynamique de la perturbation (2.44) et du rayonnement (2.46), offrent une excellente opportunité d'obtenir un certain aperçu de ces phénomènes. Mais ces deux équations comportent une difficulté. En effet, la détermination de l'évolution du champ de perturbation σ , de même que celui du rayonnement σ_R , exige préalablement que l'on dispose du profil temporel de l'impulsion stationnaire $A_S(z, t)$ qui intervient dans les membres de droite des équations (2.44) et (2.46). Comme l'expression analytique de $A_S(z, t)$ est inconnue pour la plupart des systèmes physiques réels, la résolution des équations (2.44) ou (2.46) exige préalablement que l'on dispose d'une méthode permettant d'obtenir numériquement le profil initial de l'impulsion stationnaire, $A_S(z = 0, t)$. Ensuite, pour obtenir le champ de rayonnement, on doit d'abord résoudre l'équation (2.45) et utiliser la solution obtenue $A_S(z, t)$ pour résoudre l'équation (2.46). Cette procédure de résolution simultanée des équations (2.45) et (2.46) est quelque peu fastidieuse et coûteuse en opérations de calcul. Nous montrons ci-dessous comment l'utilisation de notre approche de CCs permet de réduire de manière drastique le coût des opérations de calcul, tout en apportant le meilleur éclairage sur les mécanismes fondamentaux qui sous tendent le processus d'émission spontanée de rayonnement.

La première étape de notre approche de CCs consiste à approcher le profil station-

naire $A_S(z, t)$ par la fonction ansatz \hat{f} définie dans l'expression (2.24). En adoptant (par exemple) le choix suivant des fonctions g et h

$$g = X_1 \exp \left[-\frac{(t - X_2)^2}{X_3^2} \right] \quad (2.47a)$$

$$h = \frac{X_4}{2} (t - X_2)^2 + X_5 (t - X_2) + X_6 \quad (2.47b)$$

la méthode des OPR conduit alors au système d'équations différentielles ordinaires (2.38), dont la résolution a conduit, en tout point z , au jeu de CCs X_j , $j = 1, 2, \dots, 6$. Ensuite, on peut procéder de deux manières pour obtenir le champ de rayonnement :

(i) La première approche consiste à traiter uniquement l'équation (2.45) par la méthode des CCs, et à résoudre directement l'équation (2.46) par la méthode de Fourier à pas divisés. Les CCs de l'impulsion stationnaire sont alors utilisées pour reconstruire son profil temporel approché, à partir de la fonction ansatz \hat{f} :

$$A_S(z, t) \simeq \hat{f}(X_1(z), X_2(z), \dots, X_6(z), t) = g \exp(ih) \quad (2.48)$$

où g et h sont définies dans l'expression (2.47). L'équation (2.46) est résolue numériquement par la suite. Il est important de noter que la quantité de calculs nécessaires pour obtenir en chaque point z les valeurs des CCs X_j partant du système d'équations (2.38), ne représente qu'une très petite fraction de la quantité de calculs nécessaires pour résoudre l'équation (2.45).

(ii) On peut obtenir le champ de rayonnement de manière encore plus expéditive en traitant les équations (2.45) et (2.46) par l'approche des CCs. Le traitement de l'équation (2.46) nécessite que l'on définisse un ansatz pour le rayonnement. Par souci de simplicité, nous pouvons choisir un ansatz gaussien pour décrire le rayonnement :

$$\sigma_R \simeq Y_1 \exp \left[-\frac{(t - Y_2)^2}{Y_3^2} + i \left(\frac{Y_4}{2} (t - Y_2)^2 + Y_5 (t - Y_2) + Y_6 \right) \right] \quad (2.49)$$

où nous avons utilisé le même jeu de CCs pour désigner les composantes de rayonnement Stokes ($Y_2 = |Y_2|$, $Y_5 = -|Y_5|$) et anti-Stokes ($Y_2 = -|Y_2|$, $Y_5 = |Y_5|$). En appliquant l'approximation bare à l'équation (2.46) avec nos OPR et l'ansatz (2.49),

nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) qui suit :

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{2}\beta_2 Y_1 Y_4 - \frac{\alpha}{2} Y_1 \quad (2.50a)$$

$$\dot{Y}_2 = -\beta_2 Y_5 \quad (2.50b)$$

$$\dot{Y}_3 = -\beta_2 Y_3 Y_4 \quad (2.50c)$$

$$\dot{Y}_4 = \left(Y_4^2 - \frac{4}{Y_3^4} \right) \beta_2 - \frac{\sqrt{2}Y_1^2}{Y_3^2} \gamma + \gamma \frac{8X_3 X_1^2 [-X_3^2 - Y_3^2 + 4(X_2 - Y_2)^2]}{(X_3^2 + Y_3^2)^{5/2}} \exp \left[-\frac{2(X_2 - Y_2)^2}{X_3^2 + Y_3^2} \right] \quad (2.50d)$$

$$\dot{Y}_5 = \gamma \frac{8X_3 X_1^2 (X_2 - Y_2)}{(X_3^2 + Y_3^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{2(X_2 - Y_2)^2}{X_3^2 + Y_3^2} \right] \quad (2.50e)$$

$$\dot{Y}_6 = -\frac{1}{2} \left(Y_5^2 - \frac{2}{Y_3^2} \right) \beta_2 + \frac{5\sqrt{2}Y_1^2}{8} \gamma - \gamma \frac{X_3 X_1^2 [-2X_3^4 - 5X_3^2 Y_3^2 - 3Y_3^4 + 4Y_3^2 (X_2 - Y_2)^2]}{(X_3^2 + Y_3^2)^{5/2}} \times \exp \left[-\frac{2(X_2 - Y_2)^2}{X_3^2 + Y_3^2} \right] \quad (2.50f)$$

Les systèmes d'EDO (2.38) et (2.50) constituent ainsi le traitement complet du processus d'émission de rayonnement par une impulsion lumineuse, par l'approche de CCs négligeant le champ résiduel. Ce traitement présente deux avantages majeurs par rapport à la procédure de résolution directe des équations (2.45) et (2.46) :

(i) La réduction drastique de la quantité des opérations de calcul que ce traitement procure, permet d'obtenir aisément le comportement dynamique du rayonnement.

(ii) Le second avantage réside dans la disponibilité des expressions analytiques des vitesses de variation des paramètres de l'impulsion X_j (2.38), et de celles du rayonnement Y_j (2.50), en fonction des paramètres du système. En particulier le processus d'interaction qui stimule la restructuration du champ de perturbation sous la forme d'un rayonnement est représenté par les termes comportant une exponentielle dans les membres de droite des équations (2.50). On peut aussi clairement identifier le mode d'action des effets linéaires (pertes, dispersion) et non linéaires, sur chacun des paramètres du rayonnement.

2.5 Conclusion

La méthode des CCs constitue une puissante méthode d'analyse théorique du comportement des systèmes physiques qui présentent des effets de localisation d'énergie

à durée de vie relativement longue. En optique, de tels effets se manifestent sous la forme d'impulsions lumineuses très robustes, qui sont capables de se propager sur de très longues distances. La propagation d'une impulsion lumineuse ne correspond pas à une simple translation d'un paquet d'énergie à travers le guide d'onde. En général, l'impulsion lumineuse exécute toujours des vibrations internes plus ou moins importantes, liées aux conditions d'injection de l'impulsion dans le guide d'onde ou/et à la structure physique du guide d'onde. De manière plus générale, lorsqu'une entité physique se déplace en exécutant des déformations internes, les méthodes de CCs deviennent incontournables dans l'analyse de son comportement dynamique complet (incluant sa dynamique interne). Plusieurs techniques de CCs ont été introduites dans la littérature et exploitées intensivement au cours des deux dernières décennies. Parmi ces méthodes figure l'approche des OP, qui a d'abord été utilisée en physique de la matière condensée depuis plus d'une décennie avant d'être appliquée avec succès à la description du comportement dynamique des impulsions lumineuses. Cependant la méthode des OP, comme les autres méthodes de CCs, requière certaines manipulations algébriques (pour obtenir les expressions analytiques des vitesses de variation des CCs en fonction des paramètres du guide d'onde), qui deviennent insurmontables lorsque le nombre de CCs est relativement élevé. En d'autres termes, la possibilité d'obtention des formules analytiques des vitesses de variation des CCs s'amoindrit lorsque la taille de l'opérateur de projection (qui est proportionnelle au nombre de CCs) augmente.

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'il est possible de substituer aux OP conventionnels de grande taille, de nouveaux OP de taille considérablement réduite, que nous avons baptisé OP réduits. Cette reformulation de l'OP a été réalisée en traitant séparément l'évolution de la phase et l'évolution de l'amplitude de l'impulsion, c'est-à-dire, en utilisant deux opérateurs de projection (l'une pour l'amplitude, et l'autre pour la phase). Nous avons montré que l'emploi des OPR (en lieu et place des OPC) réduit de manière drastique la complexité des manipulations algébriques, dans toutes les approches de CCs utilisant (directement ou indirectement) cet opération de projection, à savoir, le traitement semi analytique complet (incluant le champ résiduel), l'approximation bare (négligeant le champ résiduel), et l'approche

numérique de minimisation directe du champ résiduel. Nous avons illustré la performance de cette méthode des OPR en l'appliquant avec succès au traitement du délicat problème de l'émission spontanée de rayonnement par une impulsion affectée d'une distorsion initiale de profil.

Finalement, la méthode des OPR proposée dans ce chapitre constitue une réelle avancée dans l'optimisation des outils théoriques d'analyse du comportement dynamique des impulsions lumineuses dans les guides d'onde diélectriques. Cette méthode facilitera particulièrement l'analyse de la stabilité de la propagation des impulsions sujettes à une forte dynamique interne induite par la structure du support physique (ligne de transmission, laser à fibre, etc), par des distorsions initiales de profil, ou par des événements tels que la collision avec une autre impulsion.

Chapitre 3

Impulsions lumineuses rayonnantes et non rayonnantes dans les guides d'onde à fibre optique

3.1 Introduction

De nos jours, la fibre optique s'impose comme le moyen le plus efficace et surtout le plus fiable pour transmettre des informations sur de très grandes distances. Outre la large bande passante qu'elle offre, la fibre optique est un système physique à faible atténuation, quasiment insensible aux bruits électromagnétiques. Du point de vue fondamental, la propagation des impulsions lumineuses dans une fibre optique met en jeu des effets linéaires et non linéaires tels que les pertes, la dispersion chromatique, l'auto-modulation de phase, l'effet Raman, ou l'auto-raïdissement des impulsions [61, 62, 63, 64, 65, 66], dont la compréhension permet d'optimiser les lignes de transmission. Au cours de leur propagation dans une ligne de transmission par fibres optiques, les impulsions lumineuses font face à plusieurs phénomènes susceptibles de les déstabiliser ou de les dégrader. Parmi ces phénomènes nous pouvons citer l'effet Gordon-Hans [67, 68], les interactions entre impulsions [41, 67, 69, 70, 71, 72], ou la perte d'énergie par rayonnement [24, 25, 73, 74, 75, 76]. Si certains de ces phénomènes semblent assez bien connus, d'autres en revanche ne le sont pas suffisamment. C'est le cas des phénomènes de rayonnement dans une ligne de transmission par fibre optique

dont l'étude est présentée dans ce mémoire. Les études antérieures ont montré que le rayonnement pouvait résulter de la perturbation de l'impulsion induite par les termes de dispersion d'ordre supérieur [69, 74, 76, 77, 78, 79]. Ici nous examinons plus précisément les phénomènes de rayonnement liés au support physique de transmission d'une part, et d'autre part, ceux qui résultent du désaccord de profil entre l'impulsion injectée dans le système et le profil de l'impulsion stationnaire dans ce système. Notre étude se focalise sur une fibre optique où prédominent la non linéarité Kerr, la dispersion chromatique et les pertes, avec une égalité stricte entre la longueur de dispersion et la longueur de non linéarité.

Ce travail s'organise de la manière suivante : Dans la seconde section nous présenterons le soliton à centre guidé. La troisième section sera consacrée à l'étude du rayonnement lié au support physique de transmission. La quatrième section portera sur l'étude du rayonnement lié à la distorsion du profil initial de l'impulsion et nous terminerons par une conclusion.

3.2 Le soliton à centre de guidage (*guiding-center soliton*)

Comme nous l'avons vu dans les généralités, il est impossible de réaliser en pratique une compensation exacte de la dispersion par la non linéarité dans un guide d'onde (à fibre optique) à cause de la présence d'effets fortement perturbateurs tels que les pertes, qui ne sont pas pris en compte dans l'ESNL standard et qui modifient considérablement l'importance de la non linéarité au cours de la propagation. Lorsque les pertes sont prises en compte, la propagation des impulsions dans un guide d'onde est modélisée par l'ESNL généralisée suivante [80] :

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma|A|^2 A + \frac{i\alpha}{2}A - i[(\sqrt{G} - 1) \times \sum_{j=1}^N \delta(z - jZ_A)]A = 0, \quad (3.1)$$

où N est le nombre d'amplificateurs. L'impulsion n'étant plus rigoureusement un soliton à cause des pertes et des multiples opérations d'amplification subies après chaque pas d'amplification Z_A , nous montrerons qu'il est néanmoins possible de faire propager une impulsion ayant les mêmes propriétés de stabilité qu'un soliton conventionnel

se propageant dans une ligne ayant comme caractéristiques les valeurs moyennes de la ligne réelle. Pour y parvenir, posons :

$$A(z, t) = V(z)Q(z, t), \quad (3.2)$$

qui permet de séparer la partie liée aux pertes de celle liée aux effets linéaires (dispersion chromatique) et non linéaire (effet Kerr optique). En substituant la relation (3.2) dans (3.1), on obtient les équations suivantes :

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \gamma V^2(z) |Q|^2 Q = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}V - [(\sqrt{G} - 1) \times \sum_{j=1}^N \delta(z - jZ_A)]V = 0. \quad (3.4)$$

En décomposant Q en une partie variant lentement Q_0 , et une partie fluctuant rapidement Q_1 , de valeur moyenne nulle sur un pas d'amplification, et en procédant de la même manière avec V c'est-à-dire en décomposant V en V_0 et V_1 ,

$$Q(z, t) = Q_0(z, t) + Q_1(z, t), \quad (3.5)$$

$$V(z, t) = V_0(z, t) + V_1(z, t), \quad (3.6)$$

l'équation (3.3) devient :

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial t^2} + \gamma V_0^2 |Q_0|^2 Q_0 + \text{Termes non linéaires en } Q_1(z, t) = 0 \quad (3.7)$$

où les termes non linéaires en Q_1 sont négligeables quelque soit le cycle gain-perte, c'est-à-dire, quelque soit α .

L'approximation consistant à négliger les termes en Q_1 est valable lorsque le pas d'amplification est plus petit par rapport à la longueur de dispersion. Mathématiquement cette condition se traduit par $L_D > 2Z_A$, et l'équation (3.7) devient :

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial t^2} + \gamma V_0^2 |Q_0|^2 Q_0 = 0. \quad (3.8)$$

Si $V_0 = 1$, alors Q_0 aura approximativement le même comportement que celui d'un soliton conventionnel dans une ligne idéale sans pertes, de paramètres γ et β_0 . Q_0 est nommé *soliton moyen* car c'est le soliton qui se propagerait en moyenne dans la ligne considérée. Pour obtenir les caractéristiques d'une impulsion de même comportement,

il faut déterminer V_0 telle que la valeur moyenne de V^2 [dans l'équation (3.3)] sur un pas d'amplification, soit égale à 1. Pour z compris entre 0 et Z_A , l'équation (3.4) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}V = 0, \quad (3.9)$$

et admet pour solution :

$$V(z) = V_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right). \quad (3.10)$$

La valeur moyenne de V^2 est :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{V_0^2}{\alpha Z_A} [1 - \exp(-\alpha Z_A)]. \quad (3.11)$$

Pour que $\langle V^2 \rangle = 1$, il faut que

$$V_0 = \sqrt{\frac{G \ln(G)}{G - 1}} \quad (3.12)$$

où $G = \exp(\alpha Z_A)$.

Les relations (3.2) et (3.10) nous montrent que l'effet de non linéarité décroît au fur et à mesure que l'impulsion évolue le long du pas d'amplification. Ainsi, une amplitude plus forte est choisie initialement ($V_0 > 1$) de sorte que l'effet de non linéarité soit au départ plus important que le phénomène de dispersion et qu'ensuite, cette situation se renverse en z_m . L'équilibre est globalement atteint lorsque $V = 1$ [$z = z_m = 2Z_A \ln(V_0)/\ln(G)$]. L'équation (3.8) admet alors une solution de forme sécante hyperbolique dont l'expression est :

$$Q_0(z, t) = Q_0 = \sqrt{P_m} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{T_0}\right) \exp\left(i \frac{z}{2Z_C}\right), \quad (3.13)$$

où $P_m = 1/\gamma Z_C$, $Z_C = T_0^2/|\beta_2|$ avec $Z_C = Z_D = Z_{NL}$. L'impulsion Q_0 est appelée *soliton moyen*. Le terme *soliton moyen* désigne le comportement moyen de l'impulsion dans la ligne de transmission. En pratique, le soliton moyen fournit trois caractéristiques de stabilité majeures des impulsions de très haute stabilité dans la ligne de transmission, que sont :

- La puissance moyenne des impulsions correspond à celle du soliton moyen P_m que l'on se donne. Cette caractéristique permet de calculer immédiatement la puissance initiale des impulsions dans la ligne.

$$P_0 = V_0^2 Q_0^2(0, t) = V_0^2 P_m \quad (3.14)$$

où V_0 est donné par la relation (3.12).

- La largeur temporelle du soliton moyen, T_0 (soit $\Delta T = 2T_0 \ln(1 + \sqrt{2})$ comme largeur à mi-hauteur du profil d'intensité) correspond aussi à celle de l'impulsion stationnaire dans la ligne de transmission.
- La phase du soliton moyen est aussi la même que celle de l'impulsion stationnaire.

L'intérêt majeur du concept de soliton moyen est qu'il permet d'obtenir très facilement les caractéristiques initiales d'une famille d'impulsions stables dans la ligne de transmission (puissance crête, largeur temporelle, phase), dotée d'un profil de type sécante hyperbolique :

$$A(0, t) = V_0 Q_0(0, t) = V_0 \sqrt{P_m} \operatorname{sech} \left(\frac{t}{T_0} \right). \quad (3.15)$$

La famille d'impulsions décrite par la condition initiale (3.15) et dont le profil en un point z situé entre deux amplificateurs consécutifs Z_A^n et Z_A^{n+1} , est donné par :

$$A(z, t) = V_0 \sqrt{P_m} \exp \left[-\frac{\alpha}{2} (z - Z_A^n) \right] \operatorname{sech} \left(\frac{t}{T_0} \right) \exp \left(i \frac{z}{2Z_C} \right), \quad (3.16)$$

correspond à une excellente approximation des impulsions les plus stables dans la ligne de transmission. Cette famille d'impulsions est appelée *solitons à centre de guidage* (ou encore, *guiding-center soliton*, en anglais), pour faire référence au fait que son comportement est guidé par celui du soliton moyen. En d'autres termes, on peut dire que le soliton décrit par la relation (3.16) a comme centre de guidage (de son comportement) le soliton moyen décrit dans l'expression (3.13). La Figure 3.1 (a) illustre la stabilité de propagation d'un soliton à centre de guidage sur une distance de 6000km. Cette figure représente le profil temporel de l'impulsion enregistré immédiatement après chaque amplificateur, après résolution de l'ESNL généralisée (3.1) par la méthode de Fourier à pas divisé [33], pour les paramètres suivants : $\alpha = 0.24 \text{ dB/km}$, $D = 1 \text{ ps/nm/km}$ soit $\beta_2 = -13 \times 10^{-4} \text{ ps}^2/\text{m}$, $\Delta T = 2T_0 \ln(1 + \sqrt{2}) = 40 \text{ ps}$, $\gamma = 0.002 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $P_m = 1.2 \text{ mW}$, $Z_A = 50 \text{ km}$ (ce qui conduit à $V_0 = 1.7172$).

Un point très important à préciser ici est que le soliton à centre de guidage, malgré ses propriétés de stabilité remarquables, ne correspond pas rigoureusement à l'impulsion stationnaire dans la ligne de transmission. En effet, la condition de stationnarité exige que l'impulsion retrouve rigoureusement son profil d'intensité initial à la sortie de chaque amplificateur. Or, une comparaison minutieuse entre le profil spectral

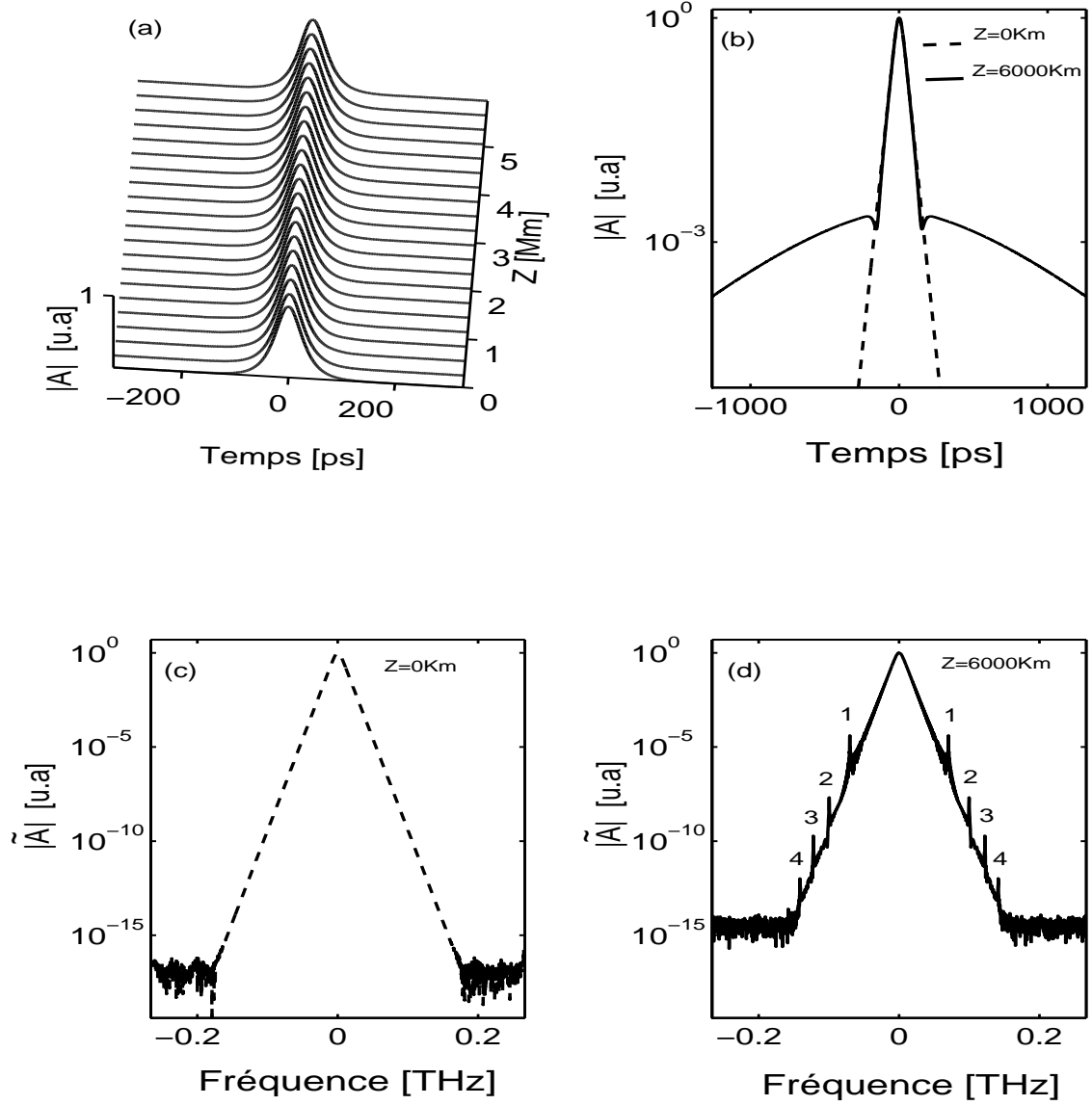


FIGURE 3.1 (a)-Profil spatio-temporel du soliton à centre de guidage, (b)-Profil temporel à l'entrée et à la sortie de la fibre, (c)-profil spectral à l'entrée du système et (d)-profil spectral à la sortie du système.

de l'impulsion à l'entrée de la ligne [Figure 3.1 (c)] et son profil spectral au bout de $z = 6000\text{km}$ [Figure 3.1 (d)], révèle la présence de plusieurs paires de bandes latérales de faible amplitude disposées de part et d'autre du centre du spectre de l'impulsion. L'apparition de ces bandes latérales démontre d'une part la non stationnarité du soliton à centre de guidage, et d'autre part, révèle l'existence d'un phénomène de

perte d'énergie par rayonnement dont ce type de soliton fait l'objet au cours de sa propagation. Les processus physiques qui déclenchent ce rayonnement sont présentés de manière détaillée dans la section 3.

3.3 Rayonnement lié au support physique de transmission : les bandes de Kelly

Comme nous l'avons mentionné plus haut, lors de la propagation d'un signal lumineux dans une ligne de transmission réelle, les impulsions lumineuses subissent des phénomènes qui peuvent s'avérer très pénalisants pour la stabilité de la propagation [33, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 81, 82]. L'un de ces phénomènes est l'émission spontanée de rayonnement. Cette émission est caractérisée par une perte d'énergie par l'impulsion (sous forme d'ondes de faible amplitude) au cours de sa propagation. Le rayonnement dans une ligne de transmission peut être lié au support physique de transmission (ligne de transmission) ou à la distorsion du profil initial.

3.3.1 Caractère rayonnant de la ligne de transmission

Ce type de rayonnement survient lorsque la structure physique de la ligne de transmission est périodique. Cette périodicité est due à la répétition du cycle *pertes-amplification* au cours de la propagation de l'impulsion dans la ligne, qui impose à l'impulsion une dynamique interne ayant la même périodicité que celle de la ligne de transmission. Physiquement, une ligne de transmission à grande distance est toujours constituée par la répétition d'une structure de base qui s'étend spatialement sur un pas d'amplification. Dans le cas qui nous intéresse, la structure de base est constituée d'un amplificateur et d'un tronçon de fibre de longueur Z_A , comme schématiquement illustré sur la Figure 3.2. Sur chaque pas d'amplification l'impulsion subit une atténuation exponentielle de puissance crête, suivie d'une amplification. Le cycle pertes-amplification génère alors au sein de l'impulsion une oscillation de la puissance crête, qui s'effectue de manière périodique mais sans être sinusoidale (comme illustré sur la Figure 3.2). On peut caractériser cette dynamique interne par

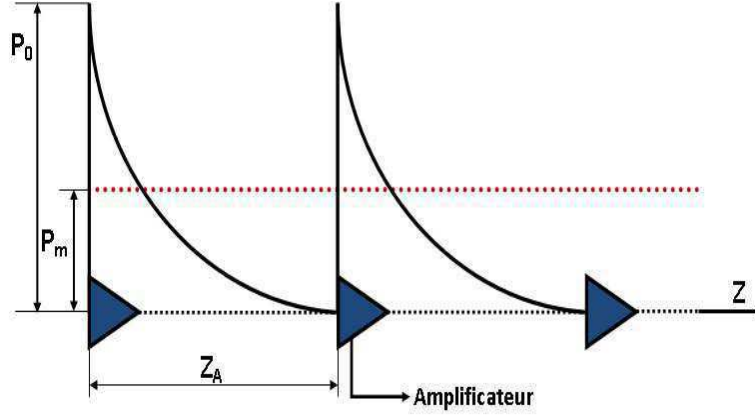


FIGURE 3.2 Illustration de l'évolution de la puissance crête de l'impulsion dans une ligne de transmission à dispersion constante et amplification périodique ($\alpha \neq 0$)

le paramètre

$$k_I = \frac{2\pi p}{Z_A} \quad (3.17)$$

qui représente le module du vecteur d'onde correspondant à l'harmonique d'ordre p de l'oscillation de la puissance crête de l'impulsion. Comme cette dynamique interne résulte uniquement de la structure périodique du support physique qu'est la ligne de transmission, ce support physique joue un rôle actif dans le processus d'échange d'énergie qui provoque la croissance des bandes latérales de rayonnement. Dans la littérature, ce type de bandes latérales est parfois qualifié de *bandes de Kelly*, en reconnaissance des travaux de pionnier Kelly and *al.* [83, 84, 85] sur ce type de comportement dynamique. Par souci de simplicité, nous adopterons également ce qualificatif qui est couramment utilisé pour désigner ce type de bandes latérales [86, 87, 88, 89, 90]. Notons au passage que toute impulsion dépourvue de bandes de Kelly lors de son entrée dans la ligne de transmission, sera forcée à les générer via un processus de restructuration, au cours duquel l'impulsion émettra un rayonnement. C'est pour cette raison que les bandes de Kelly sont parfois qualifiées de "bandes de rayonnement". Cependant, ce qualificatif est une source de confusion, car la présence des bandes de Kelly à l'entrée de la ligne signifie une absence de rayonnement. C'est leur absence dans le profil spectral à l'entrée de la fibre qui indique qu'il y aura un processus de rayonnement. De manière générale, toute impulsion qui se présentera à l'entrée de la ligne avec un profil différent de celui de l'onde sta-

tionnaire subira une restructuration de profil, au cours de laquelle elle émettra une bouffée de rayonnement liée spécifiquement à la création des bandes de Kelly. Dans ce processus, deux photons du soliton, de même fréquence ω_0 , vont se détruire par collision pour créer simultanément deux autres photons aux fréquences *Stokes* ($\omega_0 - \Omega$) et *Anti-Stokes* ($\omega_0 + \Omega$) :

$$(\omega_0; \omega_0) \rightarrow (\omega_0 - \Omega; \omega_0 + \Omega). \quad (3.18)$$

Le décalage de $\pm\Omega$ des photons Stokes et Anti-Stokes assure automatiquement la règle de conservation de l'énergie totale des photons impliqués dans l'interaction [$2\hbar\omega_0 = \hbar(\omega_0 - \Omega) + \hbar(\omega_0 + \Omega)$], mais n'apporte aucune garantie sur la règle de conservation de la quantité de mouvement (qualifiée aussi de condition d'accord de phase). Cette règle, qui s'écrit :

$$2k_0 = k_s + k_a + 2k_I, \quad (3.19)$$

requiert la participation des modes des vibrations internes de l'impulsion. En effet, au cours de l'interaction, chaque photon du soliton (k_0) excite un mode de vibration interne du soliton (k_I) afin de pouvoir créer la paire de photons Stokes et Anti-Stokes. Lorsque l'écart de fréquence Ω est relativement faible, la partie linéaire du vecteur d'onde s'écrit :

$$k_L(\omega_0 \pm \Omega) = k_L(\omega_0) \pm \Omega \left(\frac{\partial k_L}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} + \frac{1}{2} \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 k_L}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots = k_L(\omega_0) \pm \beta_1 \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 + \dots \quad (3.20)$$

En appliquant ce développement en série de Taylor à $k_a = k_L(\omega_0 + \Omega)$ et $k_s = k_L(\omega_0 - \Omega)$, la condition d'accord de phase s'écrit :

$$2k_0 = 2k_L(\omega_0) + \beta_2 \Omega^2 + 2k_I \quad (3.21)$$

où le vecteur d'onde du photon k_0 associé au soliton s'écrit :

$$k_0 = k_L(\omega_0) + \frac{1}{2Z_C} = k_L(\omega_0) + \frac{|\beta_2|}{2T_0^2}. \quad (3.22)$$

Le terme $1/2Z_C$ correspond à la phase du soliton conventionnel visible dans l'expression (3.13). La condition (3.21) s'écrit alors :

$$2k_L(\omega_0) + \frac{1}{Z_C} = 2k_L(\omega_0) + \beta_2 \Omega^2 + \frac{4\pi p}{Z_A}. \quad (3.23)$$

On en déduit aisément les fréquences satisfaisant à cette condition :

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{1}{|\beta_2|} \left(\frac{4\pi p}{Z_A} - \frac{1}{Z_C} \right)} \quad (3.24)$$

où $Z_C = T_0^2 / |\beta_2| = 1 / \gamma P_m$ correspond à la distance au cours de laquelle la dispersion et la non linéarité se compensent exactement. En reprenant les paramètres du système et les paramètres d'impulsion utilisés pour la propagation de la Figure 3.1, nous obtenons la table des fréquences des bandes latérales ci-après avec $Z_C = 136.99 km$.

p	1	2	3	4
$\frac{\Omega}{2\pi} (THz)$	0.0703	0.0997	0.1222	0.1412

TAB. 3.1 Fréquences des bandes de Kelly induites par le support physique de transmission dans un système à dispersion constante avec pertes.

Les fréquences de cette table [Table 3.1] coïncident exactement avec les fréquences des bandes latérales du spectre de la Figure 3.1 (d). Ainsi, la dynamique interne de puissance (que la ligne inflige à l'impulsion) provoque une petite perte d'énergie de l'impulsion via un processus de rayonnement. Cependant, ce rayonnement ne s'effectue pas de manière perpétuelle, car un rayonnement continu conduirait à vider totalement l'énergie de l'impulsion au bout d'un temps suffisamment long. En fait, l'impulsion émet une petite bouffée d'énergie, tout en restructurant son profil de façon à se rapprocher au mieux de son profil stationnaire.

3.3.2 Point fixe - Impulsion stationnaire

Nous avons montré dans les Figures 3.1 que le soliton à centre de guidage proposé par Hasegawa et *al.* [91] et décrit par l'expression (3.16), malgré ses qualités exceptionnelles de stabilité, ne correspond pas à l'impulsion stationnaire dans la ligne de transmission en raison de son caractère rayonnant. En effet, une impulsion stationnaire est une impulsion qui retrouve rigoureusement le même profil après chaque pas d'amplification. En d'autres termes, l'impulsion stationnaire ne produit strictement aucun rayonnement. Il existe des méthodes numériques de détermination du profil des impulsions stationnaires pour une ligne de transmission. L'une des méthodes les

plus utilisées est la méthode de Nijhof [27], qui consiste à approcher le point fixe de manière itérative. A chaque itération, on fait propager l'impulsion sur une distance correspondant à un certain nombre de pas d'amplification (typiquement, quelques dizaines) et on calcule le champ moyen de l'impulsion sur cette distance. Ce champ moyen est ensuite utilisé comme condition initiale pour la prochaine itération. La procédure se poursuit ainsi jusqu'à ce que le profil du champ moyen n'évolue plus d'une itération à une autre. On dit alors qu'on atteint le *point fixe* de transmission, qui correspond au profil de l'impulsion stationnaire dans la ligne. En utilisant cette méthode nous avons obtenu comme profil stationnaire pour la ligne de transmission considérée dans la Figure 3.2, le profil représenté dans la Figure 3.3. Plusieurs points importants émergent de cette figure :

- Le spectre du point fixe (Figure 3.3 (b)) est d'ores et déjà doté de bandes latérales liées à la dynamique interne de l'impulsion. Contrairement à l'idée largement répandue selon laquelle ces bandes latérales sont le reflet d'un rayonnement perpétuel, nous pensons qu'elles font partie intégrante du point fixe. Dans le domaine temporel (Figure 3.3 (a)), les bandes latérales génèrent une structure oscillatoire sur un fond continu qui vient se raccorder aux fronts avant et arrière d'une partie centrale de forme sécante hyperbolique.
- la présence des bandes de Kelly complexifie considérablement la structure spectrale du point fixe, et rend pratiquement impossible la synthèse d'une telle impulsion. Conséquemment, les impulsions injectées dans les lignes de transmission sont toujours affectées d'une certaine distorsion de profil par rapport au profil du point fixe. Lorsqu'une impulsion légèrement distordue pénètre dans la ligne de transmission, elle exécute aussitôt une restructuration de profil jusqu'à atteindre le profil qui lui assure la plus haute stabilité. C'est au cours de cette phase de restructuration de profil que l'impulsion peut émettre une bouffée de rayonnement. Cependant, il est important de noter que l'impulsion ne peut que se rapprocher de son profil stationnaire. En effet, elle ne peut l'atteindre après une restructuration de profil tant que l'énergie rayonnée est présente dans la ligne.

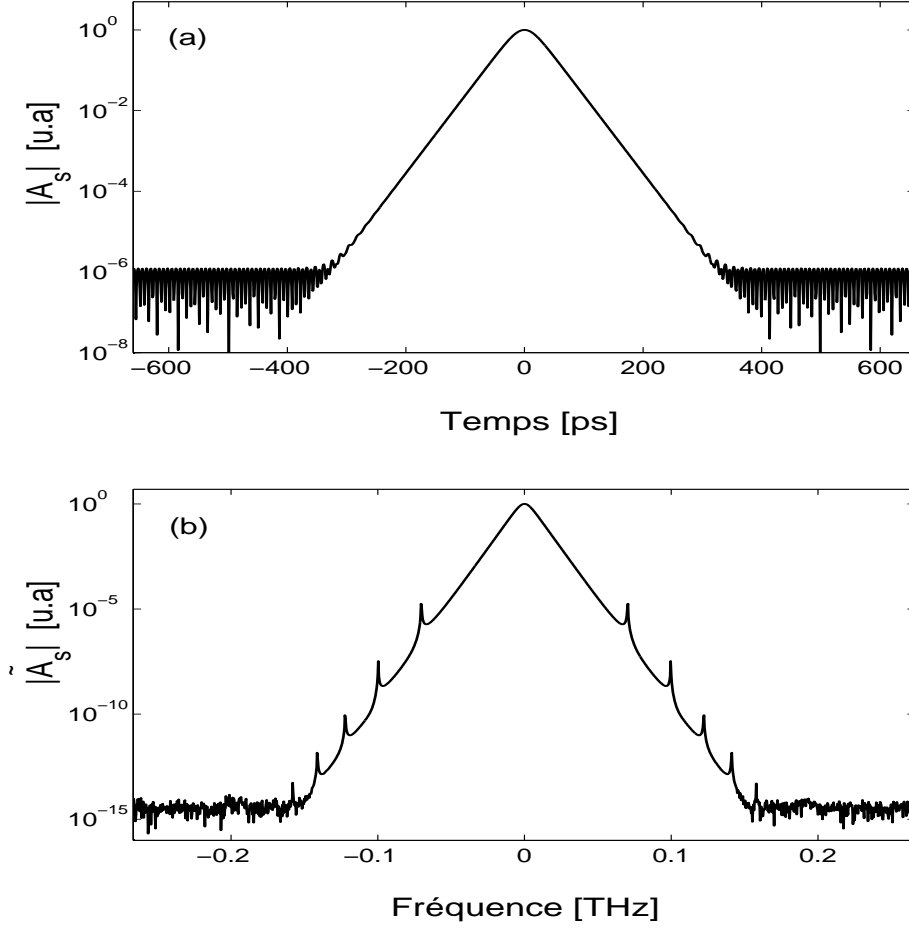


FIGURE 3.3 Profil de l'impulsion stationnaire à $z = 6000 \text{ km}$

3.4 Rayonnement lié au désaccord de profil initial entre l'impulsion injectée à l'entrée de la ligne de transmission et l'impulsion stationnaire de cette ligne

Nous avons pu démontrer dans la section précédente que le rayonnement peut être dû à la structure périodique de la ligne de transmission. Sous un autre angle, on peut considérer que la structure périodique de la ligne donne lieu à un profil spectral stationnaire doté de bandes latérales, et que c'est l'injection dans la ligne d'une

impulsion à profil spectral lisse (soliton à centre de guidage) qui provoque le rayonnement. Si l'on adopte ce point de vue, on peut s'attendre au déclenchement d'un processus de rayonnement si l'on injecte dans la ligne de transmission une impulsion à profil distordu par rapport au profil stationnaire dans la ligne. En d'autres termes, on peut s'attendre à un processus de rayonnement aussi bien dans une ligne périodiquement structurée que dans une ligne à structuration non périodique. En effet, au niveau pratique, les profils d'impulsions stationnaires de la plupart des guides d'onde réels ne sont pas réalisables. Un exemple bien connu de profil d'impulsion stationnaire pratiquement irréalisable est le profil temporel du soliton à gestion de dispersion, qui est doté d'aspérités (qualifiées de lobes latéraux) pratiquement impossible à synthétiser avec les sources d'impulsions disponibles actuellement. Une impulsion réaliste est en général plus ou moins différente de l'impulsion idéale (stationnaire). Cette différence met l'impulsion dans une condition propice au déclenchement des ondes de rayonnement. En optique, ce rayonnement se manifeste par la croissance d'une ou plusieurs paires de bandes latérales autour de la fréquence porteuse de l'impulsion. A ce jour, en dehors des processus liés à la structuration périodique de la ligne de transmission, les processus qui gouvernent la restructuration spectrale (conduisant aux bandes latérales de rayonnement) n'ont jamais été clairement identifiés. De plus, il n'existe ni méthode, ni formule analytique, ni paramètres attachés à l'impulsion ou au support physique, qui permettent de prédire les fréquences des bandes latérales de rayonnement et l'importance d'un processus de rayonnement.

Dans cette partie, nous présentons une étude détaillée de divers types de processus de rayonnement résultant d'un désaccord entre le profil initial de l'impulsion injectée dans la ligne et le profil stationnaire dans la ligne. Nous introduirons des paramètres permettant de prédire l'importance de l'*énergie rayonnée* par l'impulsion et les *fréquences des bandes latérales* de rayonnement. L'accès à ces deux grandeurs constitue la clé qui permettra la mise en place des techniques de contrôle non destructif et de suppression des ondes de rayonnement dans les systèmes où elles sont indésirables.

3.4.1 Equation de propagation du rayonnement

Le traitement théorique rigoureux d'un processus de rayonnement nécessite la connaissance du profil exact de l'impulsion stationnaire dans le guide d'onde, que nous noterons ici $A_S(z, t)$. Rappelons que cette impulsion ne produit en principe aucun rayonnement au cours de la propagation. Dans le cas de la ligne de transmission considérée dans le chapitre précédent, le profil stationnaire s'obtient numériquement par la méthode de Nijhof [27] (Figure 3.4). Notons que le soliton à centre de guidage, dont le profil est une sécante hyperbolique, est plus proche de l'impulsion stationnaire qu'un profil de type Gaussien. Pour obtenir la meilleure stabilité de propagation des

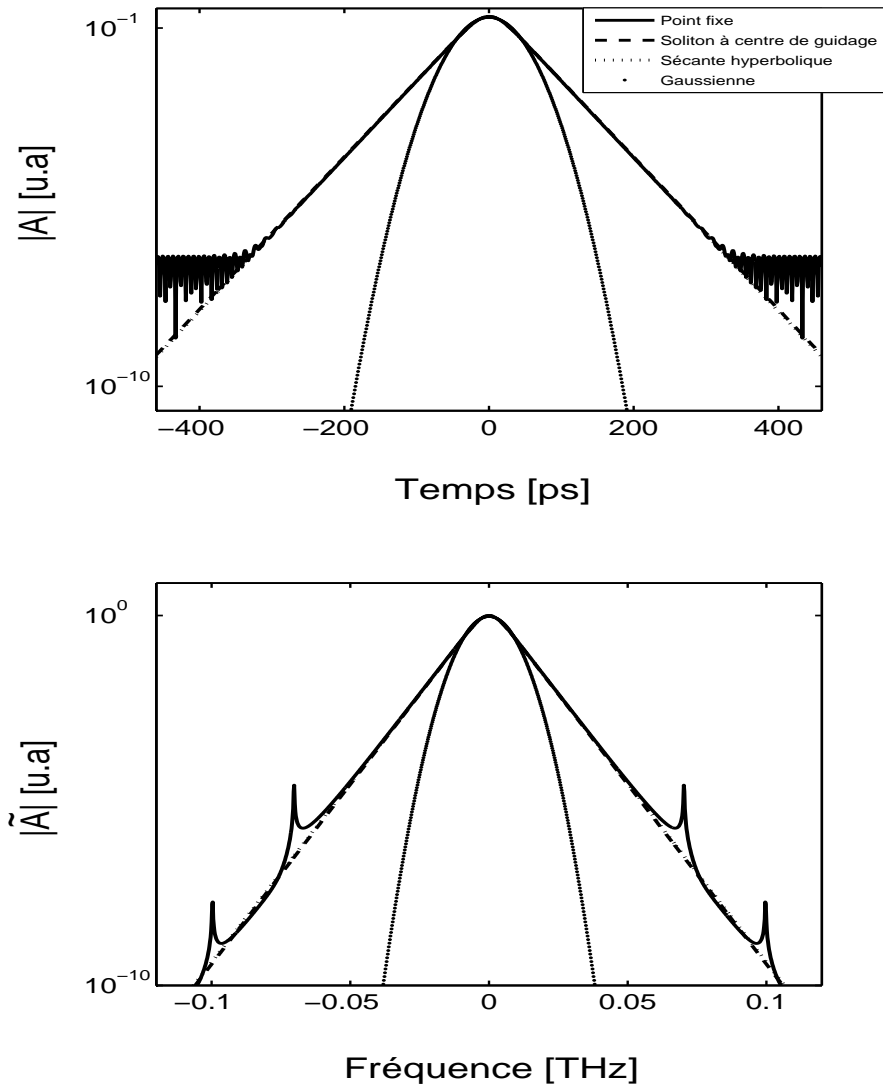


FIGURE 3.4 Profil du champ stationnaire et des profils les plus proches

impulsions dans un guide d'onde, en pratique, on s'efforce de faire en sorte que le profil de l'impulsion qui doit être injectée dans le guide, que nous noterons $A(0, t)$, soit le plus proche possible du profil temporel de l'impulsion stationnaire $A_S(0, t)$. Cependant, l'injection du champ $A(0, t) \neq A_S(0, t)$ est ressentie par le système comme une perturbation du profil stationnaire par un champ de perturbation $q(0, t)$ tel que :

$$q = A - A_S, \quad (3.25)$$

où l'amplitude du champ de perturbation q est en principe très faible par rapport à celle de A_S . En substituant la relation (3.25) dans l'ESNL (3.1), nous obtenons l'équation suivante pour l'évolution du champ de perturbation :

$$i \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \gamma |q|^2 q + \frac{i\alpha}{2} q = -\gamma (2 |A_S|^2 q + A_S^2 q^*), \quad (3.26)$$

où les termes d'interaction non linéaire d'ordre supérieur (en q^2) ont été négligés dans le membre de droite de l'équation (3.26), et où nous avons tenu compte du fait que le champ A_S est solution stationnaire de l'ESNL :

$$i \frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_S}{\partial t^2} + \gamma |A_S|^2 A_S + \frac{i\alpha}{2} A_S = 0. \quad (3.27)$$

Le champ perturbateur q est constitué de deux composantes ($q = q_r + q_p$) :

- La première est un champ piégé dans la partie centrale de l'impulsion que nous noterons q_p . Ce champ interagit fortement avec l'impulsion stationnaire, et modifie la dynamique interne de l'impulsion globale. Cette interaction s'accompagne d'un échange d'énergie induit par le second terme du membre de droite de l'équation (3.26), et peut entraîner l'effondrement de l'impulsion si l'amplitude initiale du champ de perturbation est trop élevée.
- La deuxième composante du champ de perturbation est le rayonnement que nous noterons q_r . Ce champ interagit fortement avec l'impulsion uniquement au début de la dynamique, pendant la phase de restructuration du profil initial de l'impulsion. Cette interaction, qui s'effectue par une inter-modulation de phase induite par le premier terme du membre de droite de l'équation (3.26), joue un rôle décisif dans le processus de restructuration de profil, conduisant à l'émergence des bandes latérales de rayonnement. Une excellente approximation

de l'équation de propagation du rayonnement s'écrit donc :

$$i\frac{\partial q_r}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 q_r}{\partial t^2} + \gamma |q_r|^2 q_r + \frac{i\alpha}{2}q_r = -2\gamma |A_S|^2 q_r. \quad (3.28)$$

L'évaluation du champ perturbateur reste une opération importante, car elle permet de déterminer le choix du profil de l'impulsion le mieux adapté à la ligne de transmission. Les Figures 3.5 (a1) et (b1) montrent le profil du champ de perturbation correspondant à l'injection du soliton à centre de guidage dans la ligne. Nous avons remarqué avec stupéfaction que ce soliton n'est pas l'impulsion dont le profil est le plus proche de l'impulsion stationnaire. La qualité d'un profil d'impulsion est déterminée par l'ampleur de l'énergie du champ de perturbation associé. Plus cette énergie est faible, meilleure est la qualité du profil de l'impulsion. Les Figures 3.5 (a2), (b2), (a3) et (b3) montrent respectivement le profil du champ de perturbation correspondant à l'injection de l'impulsion de forme sécante hyperbolique la plus proche de l'impulsion stationnaire, et le profil du champ de perturbation correspondant à l'injection de l'impulsion de forme Gaussienne la plus proche de l'impulsion du stationnaire. Ces différents profils prédisent la possibilité de coexistence d'un rayonnement lié à la structure du support physique avec un rayonnement lié à une distorsion du profil initial de l'impulsion dans une ligne de transmission.

En effet, les flèches de la Figure 3.5 (b1) indiquent les bandes latérales annonciatrices d'un rayonnement lié à la structuration périodique de la ligne de transmission. En plus de ces bandes latérales, on peut remarquer que les profils d'entrée de type sécante hyperbolique [Figure 3.5 (a2)-(b2)] et Gaussien [Figure 3.5 (a3)-(b3)] génèrent un champ perturbateur doté d'une structure oscillatoire dans sa partie centrale. Cette structure oscillatoire est entourée en trait discontinu dans la Figure 3.5 (a2)-(b2). Un des résultats majeurs de cette étude est la découverte que l'impulsion lumineuse n'est en mesure de restructurer son profil spectral de manière à générer deux bandes latérales de rayonnement que si la structure oscillatoire du champ perturbateur contient un minimum de périodes complètes d'oscillations. Un nombre étonnamment petit, de l'ordre de quatre périodes, suffit à l'impulsion pour se restructurer et générer des bandes latérales de rayonnement. Ainsi, le profil temporel du champ perturbateur correspondant à l'injection du soliton à centre de guidage, ne comporte dans sa partie centrale, qu'une seule période complète d'oscillation, comme indiqué dans

la Figure 3.5 (a1). Dans une telle situation, nous prédisons que cette impulsion sera incapable de se restructurer pour générer des bandes latérales de rayonnement. En d'autres termes, nous prévoyons que l'impulsion absorbera le champ perturbateur, mais nous ne pouvons prédire son aptitude à contenir cette perturbation en son sein sur une longue distance de propagation. D'autre part, la partie centrale du champ perturbateur correspondant à la sécante hyperbolique la plus proche du point fixe, comporte quatre périodes complètes d'oscillation comme indiqué dans la Figure 3.5 (a2). Nous prédisons que cette impulsion sera capable de générer des bandes latérales de rayonnement. Mais nous ne pouvons préjuger de l'importance de l'énergie qui sera rayonnée.

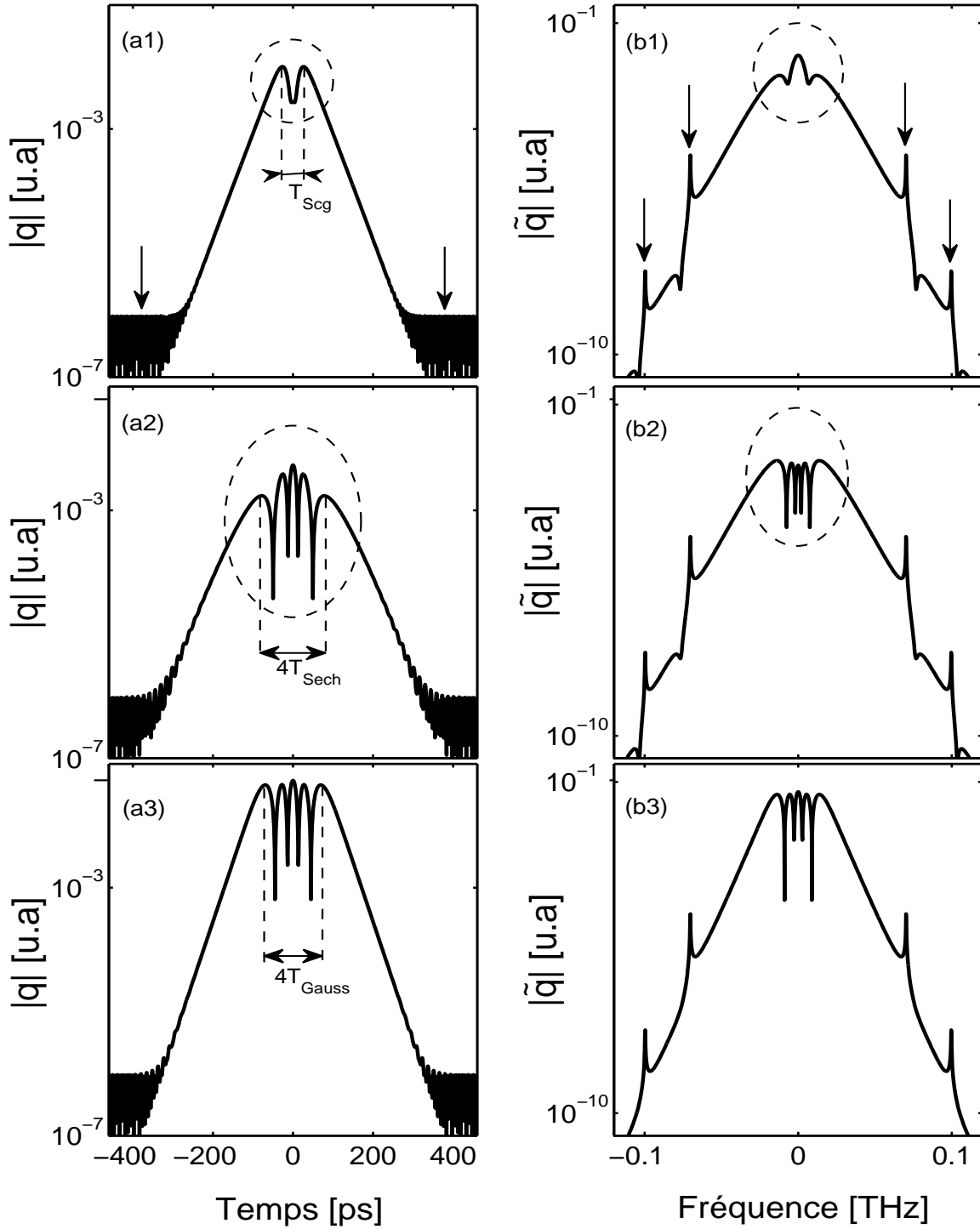


FIGURE 3.5 Profils des champs de perturbation correspondant à l'injection du soliton à centre de guidage (a1) et (b1) ; de la sécante hyperbolique la plus proche du point fixe (a2) et (b2) ; et de la Gaussienne la plus proche du point fixe (a3) et (b3).

3.4.2 Principaux types de comportements dynamiques au voisinage de l'état stationnaire

Les situations que nous avons considérées dans la Figure 3.5 correspondent aux profils analytiques des impulsions les plus utilisées dans les études théoriques, à savoir, les profils Gaussien et sécante hyperbolique. Ces deux types de profil sont très appréciés pour l'aisance qu'ils procurent dans les manipulations algébriques. Mais, comme nous l'avons déjà mentionné, aucun de ces deux types de profil ne correspond au profil stationnaire dans les systèmes de transmission existants. Mentionnons toutefois que certains modulateurs de lumière disponibles commercialement génèrent des impulsions dotées d'un profil proche d'une Gaussienne. D'autres modulateurs génèrent des profils en cloche, de forme sinusoïdale. Quels qu'ils soient, ces modulateurs délivrent des profils plus ou moins distordus par rapport au profil stationnaire dans les systèmes de transmission réels. Conséquemment, dans l'analyse qui suit, le champ perturbateur $q(0, t)$ ne se restreint plus aux situations correspondant aux impulsions de type Gaussienne ou sécante hyperbolique. Nous considérons le cas général où l'impulsion injectée dans le guide d'onde a un profil à priori quelconque, mais dont l'allure générale est très proche du profil stationnaire dans le guide d'onde. Notre analyse du comportement dynamique de l'impulsion est la suivante. Nous considérons que l'impulsion injectée dans le guide d'onde est une entité collective ayant sa propre identité. Mais comme son profil initial $A(0, t)$ est très proche de celui de l'impulsion stationnaire $A_S(0, t)$, la présence de cette impulsion à l'entrée du guide d'onde n'est pas ressentie par le système comme celle d'une simple et unique entité, mais plutôt comme la présence de l'impulsion stationnaire affectée d'une distorsion de profil $q(0, t) = A(0, t) - A_S(0, t)$. En d'autres termes, l'injection d'une impulsion de profil très proche de celui de l'impulsion stationnaire est ressentie par le système comme un événement équivalent à une collision entre l'impulsion stationnaire $A_S(0, t)$ et la perturbation $q(0, t)$. Sauf spécification contraire, dans la suite de ce travail, nous supposerons qu'au cours de cette collision, le champ perturbateur interfère avec le champ de l'impulsion stationnaire. La puissance lumineuse totale à l'entrée du guide d'onde peut alors se décomposer de la manière suivante :

$$P(0, t) = [A_S(0, t) + q(0, t)][A_S^*(0, t) + q^*(0, t)] = P_S(0, t) + P_q(0, t) + P_{CI}(0, t) \quad (3.29)$$

où $P_S(0, t) = |A_S(0, t)|^2$ représente la puissance de l'impulsion stationnaire non perturbée, et $P_q(0, t) = |q(0, t)|^2$ représente la puissance initiale du champ perturbateur. Il est important de noter dans l'expression (3.29), que la puissance totale du champ lumineux résultant de la collision entre l'impulsion stationnaire et la perturbation, n'est pas la somme des puissances de ces deux entités, en raison de l'interférence entre les champs $A_S(0, t)$ et $q(0, t)$. La puissance du champ d'interférence associée à cette collision est donnée par :

$$P_{CI}(0, t) = q^*(0, t)A_S(0, t) + q(0, t)A_S^*(0, t). \quad (3.30)$$

Ici, il est crucial de noter que contrairement à $P_S(0, t)$ et $P_q(0, t)$, la quantité $P_{CI}(0, t)$ est en réalité une pseudo-puissance car elle peut avoir une valeur positive, négative ou nulle. Par conséquent, l'énergie associée à ce champ d'interférence, qui est définie par :

$$E_{CI}(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{CI}(0, t) dt, \quad (3.31)$$

est en réalité une pseudo-énergie pouvant prendre une valeur positive, négative ou nulle. Nous ferons néanmoins référence à cette énergie comme étant l'énergie du champ d'interférence. Ainsi, à l'entrée du guide d'onde, l'énergie de l'impulsion peut se décomposer de la manière suivante :

$$E_0 = E_S + E_q + E_{CI}, \quad (3.32)$$

où $E_S(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_S(0, t)|^2 dt$ est l'énergie de l'impulsion stationnaire non perturbée, $E_q(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(0, t)|^2 dt$ est l'énergie du champ perturbateur juste avant la collision. Il est aussi important de noter que l'interaction entre l'impulsion stationnaire et la perturbation n'est pas un processus de collision ordinaire, car elle n'obéit pas aux règles de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totale du système.

Un des résultats majeurs de la présente étude est l'identification de l'énergie du champ d'interférence, E_{CI} , comme un des outils de prédiction du comportement dynamique de l'impulsion optique. En exploitant les trois grandeurs énergétiques associées

à l'impulsion initiale (E_S, E_q, E_{CI}), nous avons dressé la liste complète des scénarios possibles de comportement dynamique qu'une impulsion peut exécuter au voisinage de son état stationnaire. Nous avons établi l'existence de cinq grandes classes de comportements schématiquement représentés dans la Figure 3.6, auxquels nous avons attribué les qualificatifs respectifs suivants : "soliton idéal", "soliton hyperthermique non rayonnant", "soliton hyperthermique rayonnant", "soliton hypothermique non rayonnant", et "soliton hypothermique rayonnant". Nous définissons dans ce qui suit ces grands types de comportements dynamiques.

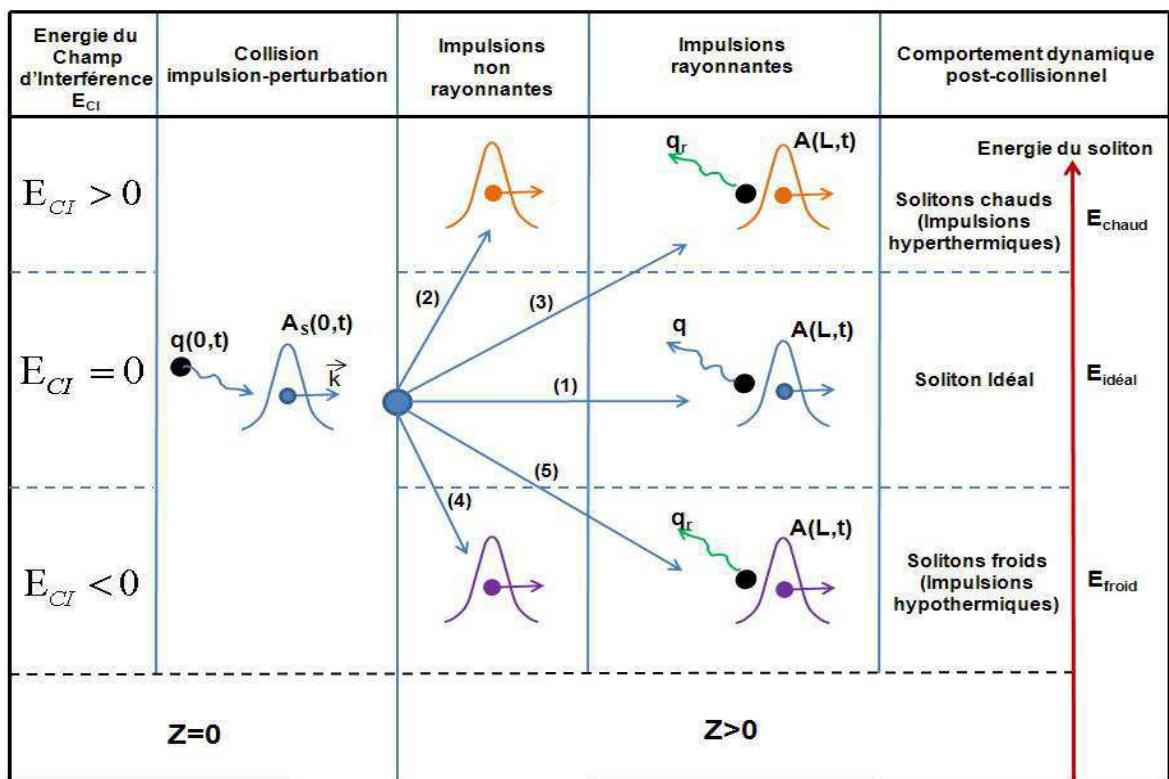


FIGURE 3.6 Diagramme des cinq scénarios de comportements résultant de la collision d'une impulsion stationnaire avec une petite perturbation q .

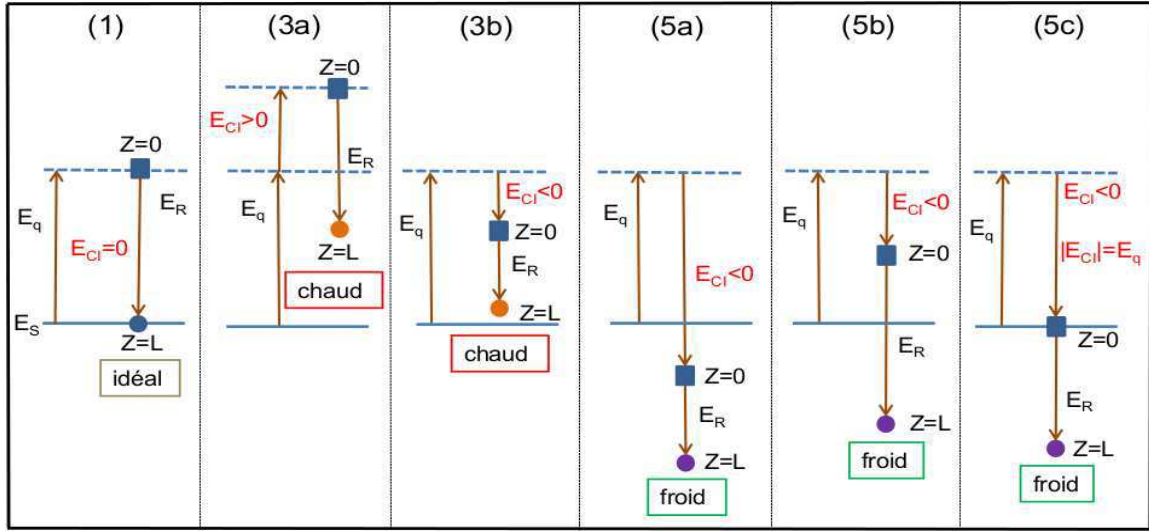


FIGURE 3.7 Dynamique des transitions d'énergies liées aux comportements rayonnants de l'impulsion.

3.4.2.1 Soliton idéal

Le comportement de type "soliton idéal" fait référence à une impulsion stationnaire dont l'énergie du champ d'interférence avec la perturbation est nulle ($E_{CI} = 0$). Nous avons découvert que dans ce cas, l'impulsion expulse totalement la perturbation (via un processus de rayonnement) et retrouve l'énergie qu'elle avait avant la collision avec la perturbation. En d'autres termes, nous définissons le *soliton idéal* comme une impulsion stationnaire dont le champ n'interfère pas avec le champ perturbateur, et qui peut exécuter un processus de rayonnement total. Toutefois, l'impulsion n'expulsera l'intégralité du champ perturbateur que si les fréquences des bandes latérales de rayonnement Stokes et Anti-stokes sont suffisamment éloignées pour ne pas interagir par mélange à quatre ondes. Sinon une interaction Stokes - Anti-stokes générera des photons résiduels au cœur de l'impulsion, à un décalage de fréquence nul par rapport à la fréquence porteuse. D'autre part, nous avons remarqué que de manière générale, lorsqu'un processus de rayonnement survient, dans quelque situation que ce soit, son déroulement se décompose en deux grandes phases, qui prennent place après l'interaction initiale entre l'impulsion stationnaire et la perturbation :

1. Dans la première phase, l'impulsion exécute une restructuration spectrale qui aboutit à la génération de deux bandes latérales. Cependant il convient d'insis-

ter sur le fait que ce processus n'aboutit pas systématiquement à la génération des bandes latérales de rayonnement. L'impulsion ne parvient à générer des bandes latérales de rayonnement que si la période de modulation du champ perturbateur est suffisamment petite pour être ressentie par l'impulsion. En d'autres termes, la période de modulation d'amplitude du champ perturbateur doit être inférieure à la largeur temporelle de l'impulsion ΔT_{FWHM} :

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} < \Delta T_{FWHM} \quad (3.33)$$

Si la condition (3.33) n'est pas vérifiée, la génération des bandes latérales de rayonnement est encore possible, à condition que le champ perturbateur présente une modulation de phase suffisamment rapide pour être ressentie par l'impulsion. Dans cette première phase de la dynamique impulsionnelle, il est pratiquement impossible d'évaluer l'énergie du rayonnement, car à ce stade le champ de rayonnement est encore très fortement imbriqué au champ global de l'impulsion.

2. La deuxième phase de la dynamique commence lorsque les bandes de rayonnement sont devenues suffisamment puissantes pour provoquer dans le domaine temporel une séparation entre le champ de rayonnement et le reste de l'impulsion. En régime de dispersion normale, la bande latérale Anti-Stokes, de fréquence $\omega_0 + \Omega > \omega_0$, dont la vitesse de groupe est inférieure à celle de l'onde porteuse, provoque un ralentissement des photons Anti-stokes, tandis que la bande latérale Stokes de fréquence $\omega_0 - \Omega < \omega_0$ provoque une accélération des photons $\omega_0 - \Omega$. Cela se traduit dans le domaine temporel par l'émergence de deux vagues de rayonnement par les fronts avant et arrière de l'impulsion, qui s'éloignent continuellement de l'impulsion à une vitesse constante.

Les conditions particulièrement strictes de propagation d'un soliton idéal (avec une énergie de champ d'interférence rigoureusement nulle), ne permettent pas d'envisager ce type de comportement comme pouvant être fréquent dans un système réel. On peut plutôt s'attendre à ce que l'ECI (énergie du champ d'interférence) soit plus fréquemment non nulle. Dans ce cas l'impulsion se retrouve alors dans l'incapacité d'expulser l'intégralité du champ perturbateur. Selon le profil du champ perturbateur,

la valeur et le signe de l'énergie du champ d'interférence, l'impulsion peut exécuter une variété de comportements totalement inattendus, incluant des situations de propagation avec un déficit ou un excédent d'énergie par rapport à l'énergie de l'état stationnaire, et avec une certaine capacité de rayonnement, ou même une incapacité de rayonnement. Les principaux types de comportements dynamiques sont schématiquement représentés dans la Figure 3.6 qui inclut les comportements rayonnants et non rayonnants. La Figure 3.7, représente de manière plus détaillée les comportements rayonnants sous la forme simplifiée de transitions énergétiques.

3.4.2.2 Solitons hyperthermiques rayonnants et non rayonnants

Nous avons observé que lorsque l'énergie du champ d'interférence est non nulle ($E_{CI} \neq 0$), l'impulsion perturbée devient incapable d'expulser la totalité de sa perturbation, mais peut effectuer une propagation hautement stable avec un excédent d'énergie par rapport à l'énergie de l'état stationnaire, dans l'une des deux configurations ci après :

(i) Si l'impulsion perturbée n'a pas la capacité de se restructurer pour générer des bandes latérales de rayonnement, elle capturera totalement la perturbation, et poursuivra sa propagation avec une énergie E_{chaud} (légèrement) supérieure à l'énergie de son état stationnaire : $E_{chaud} > E_{ideal}$. Nous faisons référence à ce type d'impulsion perturbée comme étant un *soliton hyperthermique non rayonnant*. Il est représenté dans la Figure 3.6 par la flèche portant l'étiquette "(2)".

(ii) Si l'impulsion est en capacité de générer des bandes latérales de rayonnement, elle expulsera une partie de la perturbation via ce processus de rayonnement. L'autre partie de la perturbation restera définitivement piégée au sein de l'impulsion, qui poursuivra sa propagation avec une énergie légèrement supérieure à celle de l'impulsion stationnaire. Nous qualifions ce type d'impulsion perturbée de *soliton hyperthermique rayonnant* [représenté par la flèche "(3)" de la Figure 3.6]. Comme l'impulsion ne peut rayonner une énergie E_R supérieure à celle de la perturbation initiale ($E_R \leq E_q$), il est clair que l'on peut obtenir ce type de comportement aussi bien pour $E_{CI} > 0$ que $E_{CI} < 0$, comme l'illustre les configurations (3a) et (3b) de la Figure 3.7. Cependant pour $E_{CI} < 0$, le comportement hyperthermique n'est possible

que si l'énergie rayonnée est suffisamment petite pour que l'énergie de l'impulsion, débarrassée de son rayonnement, reste supérieure à l'énergie de l'état stationnaire.

3.4.2.3 Solitons hypothermiques rayonnants et non rayonnants

Lorsque l'ECI est non nulle, l'impulsion, qui se trouve alors dans l'incapacité d'expulser la totalité de la perturbation, peut effectuer une propagation hautement stable avec un déficit d'énergie par rapport à l'énergie de l'état stationnaire, dans l'une des deux configurations suivantes :

(i) Si l'impulsion est incapable d'exécuter un processus de rayonnement, elle capturera toute la perturbation et poursuivra sa propagation avec une énergie légèrement inférieure à celle de l'impulsion stationnaire. Nous qualifions ce type d'impulsion de *soliton hypothermique non rayonnant*. Ce comportement est représenté par la flèche "(4)" de la Figure 3.6.

(ii) Si l'impulsion est capable de rayonner, elle n'expulsera qu'une partie de la perturbation et poursuivra sa propagation avec en son sein l'autre partie de la perturbation. Il s'agit alors d'un *soliton hypothermique rayonnant* [illustré par la flèche "(5)" de la Figure 3.6]. On ne peut obtenir ce type de comportement que pour $E_{CI} < 0$, comme l'illustrent les configurations (5a), (5b), et (5c) de la Figure 3.7. Cependant ces trois configurations diffèrent fondamentalement selon l'ampleur de l'ECI :

(1) Pour $|E_{CI}| > E_q$, l'impulsion débute sa propagation en état d'hypothermie et reste dans cet état après le rayonnement [configuration (5a)].

(2) Le cas $|E_{CI}| < E_q$, représenté par la configuration (5b) de la Figure 3.7, correspond à un cas spécial très intéressant, où l'impulsion débute sa propagation en état d'hyperthermie, avant de basculer dans un état d'hypothermie suite à la perte d'énergie par rayonnement. Nous qualifierons ce type d'impulsion de "Soliton hybride", pour faire référence au fait que cette impulsion exécute au cours de la même propagation deux types de comportements : hyperthermique et hypothermique.

(3) Une autre situation spéciale survient lorsque $|E_{CI}| = E_q$. Dans ce cas, l'impulsion conserve son énergie au cours de l'interaction initiale, et débute sa propagation avec une énergie exactement égale à l'énergie de l'état stationnaire. Ensuite la perte d'énergie par rayonnement provoque le basculement de l'impulsion dans un état d'hy-

pothermie [Figure 3.7 (5c)].

Les principaux types de solitons qui sont apparus dans la littérature jusqu'à présent, peuvent s'insérer dans les grandes classes de comportements dynamiques de l'impulsion lumineuse, que nous avons identifiées et représentées schématiquement dans les Figures 3.6 et 3.7. Les paramètres utilisés pour réaliser cette classification des solitons constituent également d'excellents outils de prédiction du comportement dynamique d'une impulsion lumineuse au voisinage de son état stationnaire. Ainsi, le Tableau 3.2 montre comment les trois types d'impulsions que nous avons considérées dans la Figure 3.5 en raison de leur immense popularité dans la littérature, s'insèrent dans notre classification des comportements dynamiques solitoniques.

Energies en [pJ]	Soliton à centre de guidage (A_{scg})	Meilleur ajustement sécante hyperbolique(A_{sech})	Meilleur ajustement Gaussien (A_{Gauss})
E_{CI}	-7.9887×10^{-6}	-4.2441×10^{-6}	-18.573×10^{-4}
E_q	2.4774×10^{-5}	4.2423×10^{-6}	9.3032×10^{-4}
E_0	16.648×10^{-2}	16.646×10^{-2}	16.554×10^{-2}
$E_0 - E_S$ ($E_q + E_{CI}$)	1.6786×10^{-5}	-1.7897×10^{-9}	-9.2713×10^{-4}
Comportements dynamiques	Soliton hyperthermique non rayonnant	Soliton hypothermique rayonnant	Soliton hypothermique rayonnant

TAB. 3.2 Classification des comportements dynamiques du soliton à centre de guidage, du soliton à profil sécante hyperbolique, et le soliton à profil Gaussien, les plus proches du champ stationnaire.

Le Tableau 3.2 ci dessus prédit que le soliton à centre de guidage découvert par Hasagawa et al. [91] tombe dans la catégorie des solitons hyperthermiques non rayonnants. En effet, on peut remarquer dans la Figure 3.5 (a1) que le champ perturbateur qui lui est associé ne contient qu'une seule période de modulation ; ce qui est nettement insuffisant pour générer des bandes latérales de rayonnement. Il ne pourra donc pas rayonner. Par ailleurs, on peut noter dans le Tableau 3.2 que son énergie

est supérieure à celle de l'état stationnaire ($E_0 - E_S = 1.6786 \times 10^{-5} > 0$). Ce soliton débutera et terminera sa propagation en état hyperthermique (compte tenu de son caractère non rayonnant). Une analyse prédictive comparable nous permet de classer les impulsions sécante hyperbolique et Gaussienne dans la catégorie des solitons hypothermiques rayonnants. Leur caractère rayonnant est facilement prévisible sur les Figures 3.5 (a) et 3.5 (b), où nous observons que les champs perturbateurs associés à ces deux impulsions comportent chacun quatre périodes de modulation, ce qui est largement suffisant pour déclencher une restructuration spectrale conduisant à la formation des bandes latérales de rayonnement. Ainsi donc, un fait tout à fait remarquable qu'il convient de souligner ici est que le Tableau 3.2 a été réalisé de manière prédictive, c'est-à-dire, sans avoir eu à exécuter la propagation de chacune des impulsions dans le guide d'onde. Cette analyse prédictive nécessite uniquement la connaissance du profil du champ stationnaire dans le guide d'onde.

Nous pouvons donc dire que, les solitons hypothermiques (rayonnants ou non rayonnants) se comportent comme des objets qui se sont refroidis lors de leur interaction initiale avec la perturbation. Conséquemment, par souci de simplicité de langage, nous les appellerons également "solitons froids", tandis que les solitons hyperthermiques seront aussi appelés "solitons chauds".

3.4.3 Illustration quantitative de la dynamique des solitons perturbés

Pour illustrer quantitativement les différents types de comportements présentés ci-dessus, il est nécessaire de préciser le profil du champ perturbateur. Pour inclure dans cette illustration la grande diversité des perturbations susceptibles de distordre les impulsions à l'entrée du guide d'onde, nous avons choisi une perturbation de la forme suivante

$$q(0, t) = \xi(0, t)A_S(0, t), \quad (3.34)$$

où nous nous servons de $A_S(0, t)$ pour borner l'action de la perturbation à la fenêtre temporelle d'émission de l'impulsion. Le champ $\xi(0, t)$ est choisi arbitrairement sous

la forme suivante :

$$\xi(0, t) = \frac{\varepsilon}{2} [\eta \sin(\Omega_0 t + \phi) + \delta] \exp \left[i \left(\phi_0 + \frac{a}{2} t^2 \right) \right], \quad (3.35)$$

où ε est une constante qui sert à ajuster l'amplitude de la perturbation. η , Ω_0 et ϕ représentent respectivement l'amplitude, la fréquence angulaire et la phase de la modulation en amplitude de la perturbation. Le paramètre δ nous donne la possibilité de superposer à cette modulation d'amplitude une composante continue, les paramètres a et $\phi_0(0, t)$ servant respectivement à doter la perturbation d'un chirp et d'une constante de phase.

Un des critères d'évaluation du caractère plus ou moins rayonnant d'un soliton perturbé est l'énergie du champ rayonné, que nous définissons comme étant l'énergie de la composante délocalisée du champ perturbateur. En effet, le champ perturbateur à une distance L de l'entrée de la fibre s'écrit :

$$q(L, t) = A(L, t) - A_S(L, t) \quad (3.36)$$

Pour cerner la composante délocalisée du champ $q(L, t)$ nous avons défini une fenêtre temporelle de référence centrée à l'origine du référentiel propre de l'impulsion, et dotée d'une largeur T_B fixée arbitrairement à cinq ou six fois la largeur temporelle de l'impulsion ΔT_{FWHM} (largeur à mi-hauteur du profil d'intensité). Cette fenêtre sera appelée *temps bit*. Sa largeur sera ajustée pour chaque situation de manière à ce que le rayonnement puisse être détecté rapidement. La partie du champ perturbateur située à l'intérieur du temps bit sera qualifiée de *champ piégé*, tandis que celle située à l'extérieur du temps bit sera qualifiée de *champ rayonné*. Ainsi donc, l'énergie rayonnée après une distance de propagation L de l'entrée de la fibre est définie par :

$$E_R(L) = \int_{-\infty}^{-\frac{3T_B}{4}} |q(L, t)|^2 dt + \int_{+\frac{3T_B}{4}}^{+\infty} |q(L, t)|^2 dt. \quad (3.37)$$

Il est à noter que la largeur de la fenêtre de séparation entre le champ piégé et le champ rayonné sera fixée à 1.5 fois le temps bit T_B . En réalité la largeur de cette fenêtre (qui doit être au moins égale au temps bit) doit être ajustée en fonction de la distance de propagation L et de la vitesse d'éloignement du rayonnement. En particulier, lorsque la vitesse d'éloignement du champ rayonné est faible, la largeur

de la fenêtre de séparation doit être la plus proche possible du temps bit, afin de détecter le rayonnement rapidement. L'énergie du champ piégé est définie par :

$$E_P(L) = \int_{-\frac{3T_B}{4}}^{+\frac{3T_B}{4}} |q(L, t)|^2 dt. \quad (3.38)$$

Notons que le calcul de $q(L, t)$ nécessite de connaître le champ $A(L, t)$, que nous obtenons en résolvant l'ESNL à partir de la condition initiale $A(0, t) = q(0, t) + A_S(0, t)$. Les résultats quantitatifs sont présentés dans les sous-sections qui suivent. L'analyse prédictive que nous avons effectuée à partir du Tableau 3.2 et d'une simple inspection du profil temporel du champ de perturbation initial [Figure 3.5], est remarquablement confirmée par les simulations numériques de propagation des impulsions considérées. Les résultats sont visibles dans les Figures 3.8.

Les Figures 3.8 (a1)-(b1), qui montrent l'évolution du champ perturbateur associé à la propagation du soliton à centre de guidage sur une distance de $6000km$, confirme notre prédiction de l'absence de rayonnement. On peut clairement observer dans la Figure 3.8 (a1) que l'impulsion exécute une restructuration qui se traduit par une modification progressive du champ perturbateur, depuis l'entrée ($z = 0$) jusqu'à la sortie du système ($z = 6000km$). Mais cette restructuration ne permet pas de générer des bandes latérales suffisamment importantes pour déclencher le processus de rayonnement [comme le montre la Figure 3.8 (b1)]. On peut enfin clairement observer dans la Figure 3.8 (a1), que l'impulsion absorbe la perturbation, mais sans pouvoir la contenir en son sein sur toute la durée de la propagation. Conséquemment, le champ perturbateur s'élargit continuellement (en s'aplatissant) au cours de la propagation.

Contrairement au cas de la Figure 3.8 (a1)-(b1), les Figures 3.8 (a2)-(b2), qui montrent l'évolution du champ perturbateur associé à la propagation de l'impulsion de profil sécante hyperbolique le plus proche de l'impulsion stationnaire, confirment notre prédiction d'un processus de rayonnement. Le profil temporel du champ perturbateur présenté dans la Figure 3.8 (a2), montre clairement deux vagues de rayonnement suffisamment éloignées du centre de repère propre de l'impulsion. Au centre de ce repère, on distingue un champ piégé. D'autre part, les Figures 3.8 (a3)-(b3) montrent que l'injection d'une impulsion de profil Gaussien donne lieu à un comportement qualitativement similaire à celui de la sécante hyperbolique de la Figure 3.8 (a2), à savoir le rayonnement d'une partie du champ perturbateur et le piégeage de

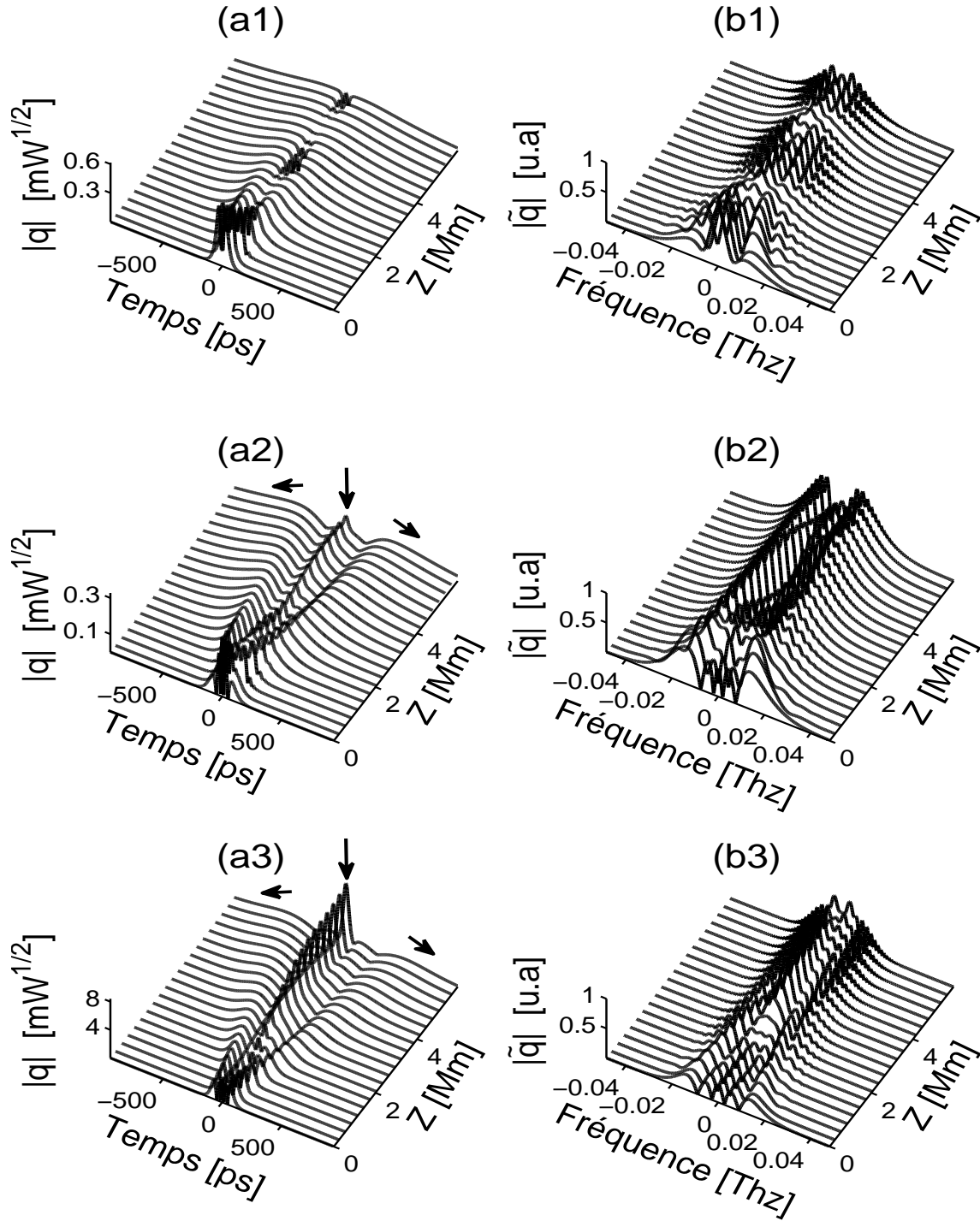


FIGURE 3.8 Propagation des champs perturbateurs générés par : le soliton à centre de guidage (a1) et (b1), la sécante hyperbolique la plus proche du point fixe (a2) et (b2), et la Gaussienne la plus proche du point fixe (a3) et (b3). Dans les Figures (a2) et (a3) les flèches horizontales indiquent les ondes rayonnées. La flèche verticale indique la partie du champ de perturbation piégée au sein de l'impulsion.

l'autre partie. Nous observons cependant une différence quantitative majeure concernant l'amplitude du champ piégé, qui est plus élevée dans le cas de l'injection d'une impulsion Gaussienne [Figure 3.8 (a3)].

3.4.3.1 Soliton idéal

Ce type de soliton peut s'obtenir en posant $\delta = \phi_0 = a = 0$, ce qui conduit à $E_{CI} = 0$. Le rayonnement total de la perturbation est visible dans la Figure 3.9 (a) où on distingue clairement deux vagues de rayonnement correspondant respectivement aux bandes latérales Stokes et Anti-stokes, et dont les fréquences sont clairement visibles dans le spectre du champ perturbateur [Figure 3.9 (b)]. Les Figures 3.9 (c) et (d) représentent les courbes des énergies rayonnée (E_R/E_{q_0}) et piégée (E_P/E_{q_0}), rapportées à l'énergie du champ perturbateur avant la collision (à l'entrée de la ligne) ($E_{q_0} = E_{q(0,t)}$).

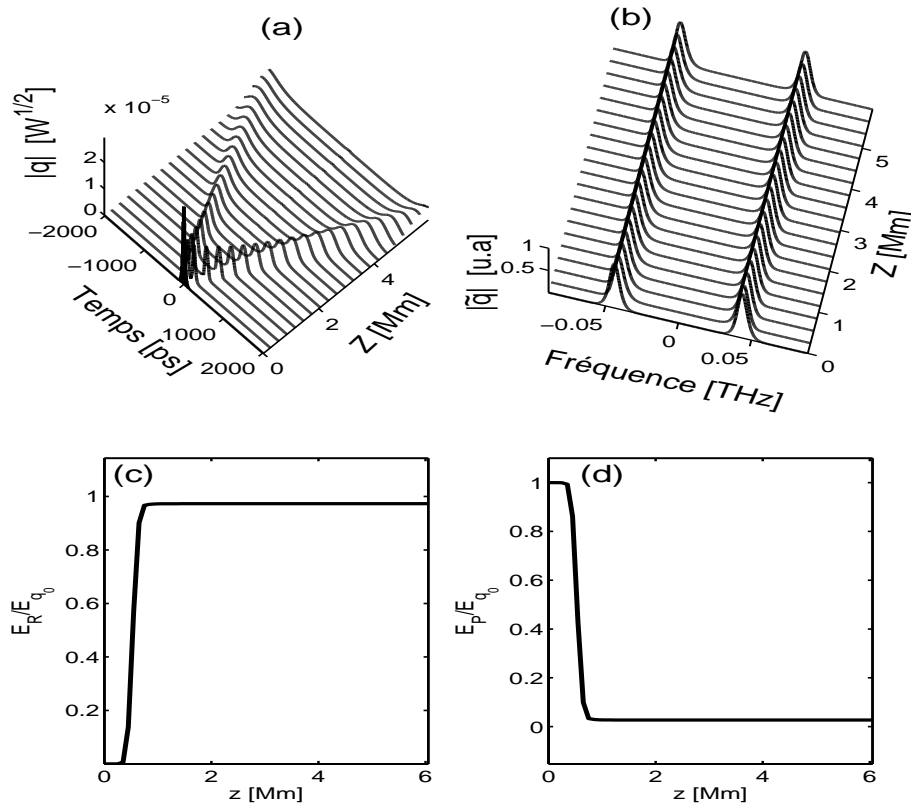


FIGURE 3.9 Evolution du champ perturbateur et des courbes d'énergies dans le cas du rayonnement total pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\phi = 0$.

3.4.3.2 Soliton hyperthermique rayonnant

Les Figures 3.10 illustrent le comportement rayonnant d'un soliton chaud généré par un champ perturbateur modulé en amplitude, obtenu pour $\phi_0 = a = 0$ et $\eta = 1$. Dans la Figure 3.10 (a) on peut clairement distinguer le champ piégé au centre du repère propre de l'impulsion, ainsi que les deux vagues de rayonnement qui s'éloignent de ce champ piégé. A ce champ piégé correspond un pic clairement visible au centre du spectre du champ perturbateur [Figure 3.10 (b)]. On peut aussi remarquer dans la Figure 3.10 (d) que l'énergie piégée au sein de cette impulsion est de l'ordre de 80 fois l'énergie de la perturbation initiale.

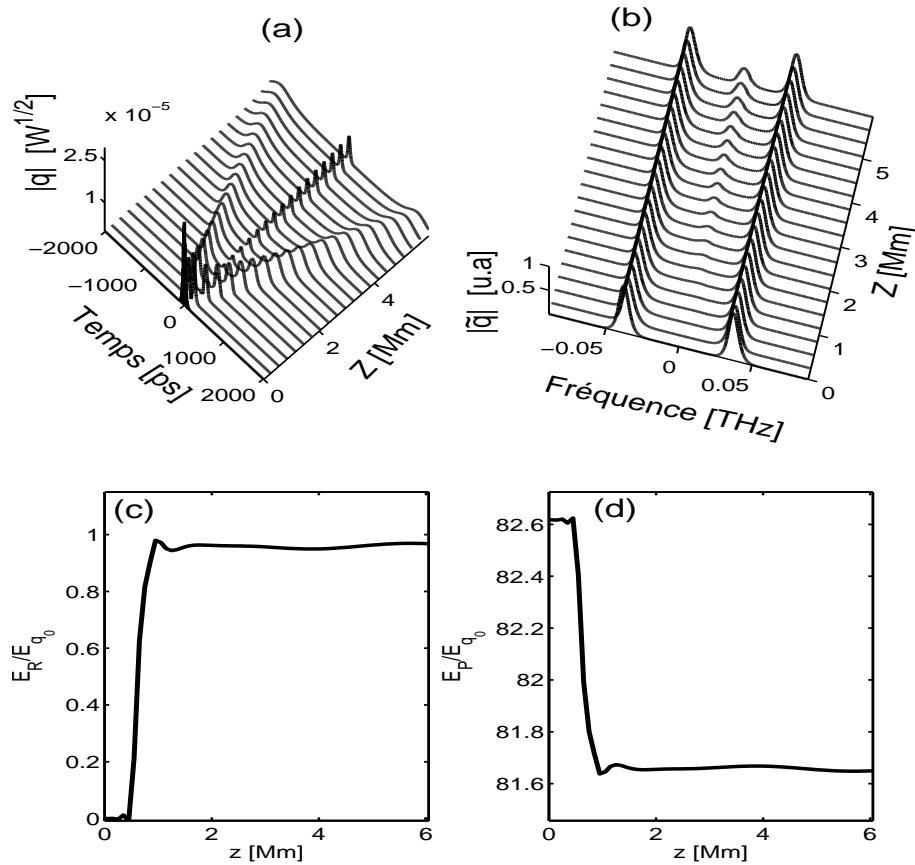


FIGURE 3.10 Evolution du champ perturbateur initialement modulé en amplitude, pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\phi = \frac{\pi}{10}$, $\delta = 0.009$.

3.4.3.3 Soliton hyperthermique non rayonnant

Les Figures 3.11 illustrent le comportement dynamique d'un soliton hyperthermique non rayonnant, obtenu pour un champ perturbateur de paramètres $\varepsilon = 10^{-3}$, $\eta = 0$, $\delta = 0.6$, $\phi_0 = 0$, $a = 0$. On peut clairement remarquer dans la Figure 3.11 (a) que l'impulsion se trouve dans l'incapacité de rayonner. Cependant nous avons constaté que dans le cas des solitons non rayonnants, l'impulsion ne parvient pas toujours à contenir cette perturbation au cours de la propagation. Au bout d'une certaine distance de propagation, une partie de l'énergie de l'impulsion déborde du temps bit comme on peut le voir dans la Figure 3.11 (c). Ce comportement traduit un début de déstabilisation de l'impulsion.

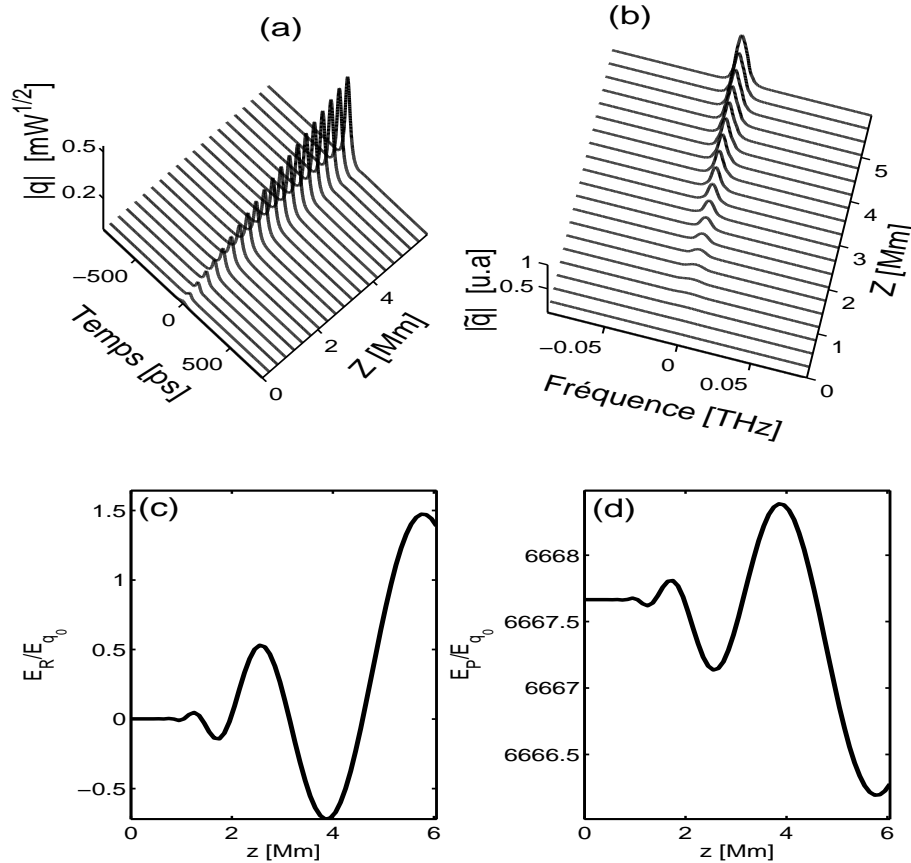


FIGURE 3.11 Evolution du champ perturbateur et des énergies dans le cas d'un soliton chaud non rayonnant obtenu pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\eta = 0$, $\delta = 0.6$, $\phi_0 = 0$, $a = 0$.

3.4.3.4 Soliton hypothermique rayonnant

Les Figures 3.12 illustrent remarquablement le comportement d'un soliton hypothermique rayonnant que nous avons obtenu pour un champ perturbateur modulé en amplitude, pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\phi = \frac{11\pi}{10}$, $\delta = -0.0075$, $\eta = 1$ et $\phi_0 = a = 0$. On peut clairement distinguer les deux ondes de rayonnement qui s'éloignent de l'impulsion en s'étalant sous l'effet de la dispersion, alors que le champ piégé au sein de l'impulsion se structure progressivement. Par ailleurs, on peut remarquer dans les Figures 3.12 (c) et (d), que l'accroissement de l'énergie rayonnée dans la fenêtre de détection s'accompagne d'une baisse de l'énergie piégée dans la même proportion.

Quantitativement, nous avons noté, aussi bien dans le cas du soliton chaud que du soliton froid, que l'énergie rayonnée est au plus égale à l'énergie de perturbation initiale.

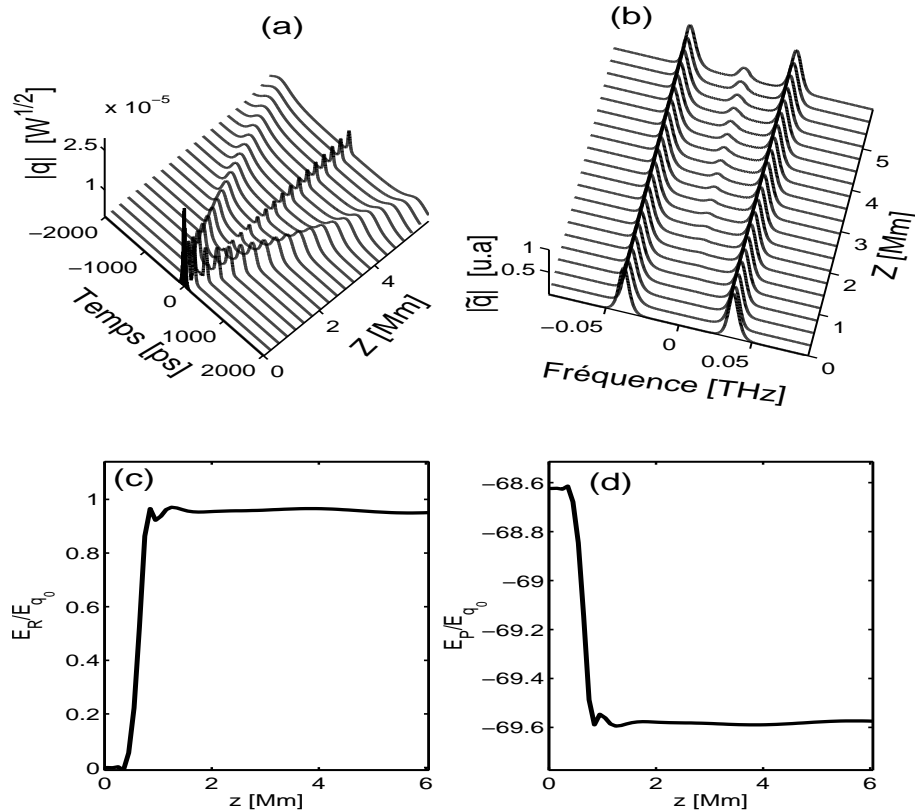


FIGURE 3.12 Evolution du champ perturbateur modulé en amplitude, de l'énergie rayonnée et l'énergie piégée pour un soliton froid rayonnant, obtenues pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\phi = \frac{11\pi}{10}$, $\delta = -0.0075$, $\eta = 1$. La figure (a) représente le profil temporel du champ perturbateur, La figure (b) représente son profil spectral.

3.4.3.5 Soliton hypothermique non rayonnant

Comme dans le cas du soliton hyperthermique non rayonnant, nous obtenons qualitativement les mêmes comportements, à savoir, que l'impulsion ne parvient pas à contenir la perturbation au cours de la propagation. Quantitativement, contrairement au soliton hyperthermique non rayonnant qui a une énergie supérieure à l'énergie de l'impulsion stationnaire de la ligne, le soliton hypothermique non rayonnant a quant à lui, une énergie inférieure à celle du point fixe [Figure 3.13].

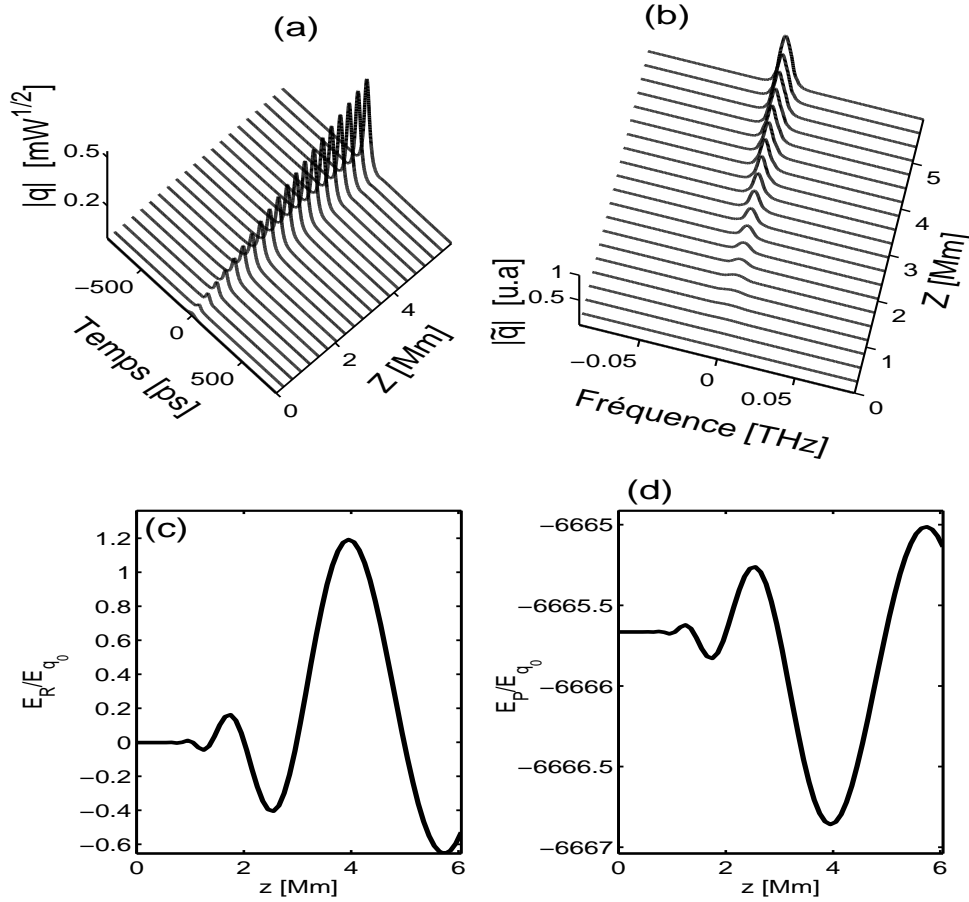


FIGURE 3.13 Evolution du champ perturbateur et des énergies dans le cas du soliton hypothermique non rayonnant pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\eta = 0$, $\delta = -0.6$, $a = \phi_0 = 0$.

3.4.4 Identification directe de la *classe dynamique* d'une impulsion rayonnante

Dans les paragraphes précédents nous avons établi l'existence de six grandes classes de comportements dynamiques pour les impulsions qui exécutent une propagation de haute stabilité au voisinage de leur état stationnaire, après avoir émis un rayonnement.

Une procédure numérique relativement simple pour identifier de manière directe la *classe dynamique* d'une impulsion rayonnante consiste, dans un premier temps, à choisir une fenêtre temporelle attachée au repère propre de l'impulsion, centrée sur cette dernière, et dotée d'une largeur suffisante pour englober la majeure partie de l'énergie de l'impulsion. En effet, les profils d'impulsion considérés dans la présente étude n'ont pas un support temporel rigoureusement compact. Les ailes de ces impulsions (qu'elles soient de type Gaussienne ou Sech) s'étendent jusqu'à l'infini (en décroissant exponentiellement). Conséquemment, une fenêtre temporelle de largeur finie ne peut rigoureusement contenir la totalité de l'énergie de ce type d'impulsion. Cependant, on peut circonscrire la partie utile de l'impulsion (c'est-à-dire, celle qui contient la majeure partie de l'énergie de l'impulsion) à l'aide d'une fenêtre temporelle de largeur de l'ordre de 1.5 fois *le Temps Bit* (T_B). Dans notre processus d'identification de la *classe dynamique* des impulsions rayonnantes, les énergies sont évaluées dans cette *fenêtre de circonscription* de la partie utile de l'impulsion, avec un *Temps Bit* fixé arbitrairement à 6 fois la largeur temporelle à mi hauteur du profil d'intensité de l'impulsion ($T_B = 6 \times \Delta T_{FWHM}$). Ainsi donc, notre procédure d'identification directe de la *classe dynamique* d'une impulsion rayonnante repose sur la comparaison entre l'évolution (avec la distance de propagation) de l'énergie de l'impulsion injectée dans le guide d'onde, $\tilde{E}_0(z)$, et l'évolution de l'énergie de l'impulsion stationnaire, $\tilde{E}_S(z)$, les énergies étant évaluées dans la même *fenêtre de circonscription temporelle* pour les deux impulsions. Quantitativement, les énergies $\tilde{E}_0(z)$ et $\tilde{E}_S(z)$ sont donc définies par :

$$\tilde{E}_0(z) = \int_{\frac{3T_B}{4}}^{-\frac{3T_B}{4}} |A(z, t)|^2 dt \quad (3.39)$$

$$\tilde{E}_S(z) = \int_{-\frac{3T_B}{4}}^{\frac{3T_B}{4}} |A_S(z, t)|^2 dt \quad (3.40)$$

La Figure 3.14, qui montre l'évolution des énergies des trois impulsions standards considérées dans la Figure 3.5, exhibe plusieurs points importants :

(i) La Figure 3.14 (a) montre que l'énergie du soliton à centre de guidage commence et termine sa propagation en hyperthermie ($\tilde{E}_0(z) > \tilde{E}_S$), en accord avec notre prédiction de la Table 3.2. Par ailleurs on remarque que son énergie diminue continuellement et de manière monotone tout au long de la propagation. Cette fuite d'énergie (de la *fenêtre de circonscription*) traduit une déstabilisation progressive de l'impulsion.

(ii) La Figure 3.14 (b) montre que l'énergie du soliton à profil Sech commence et termine sa propagation en hypothermie ($\tilde{E}_0(z) < \tilde{E}_S$). En examinant attentivement cette figure, nous remarquons trois phases bien distinctes dans le comportement dynamique. La première phase donne lieu à un plateau, qui va de $z = 0$ jusqu'à $z \simeq 700Km$. La présence de ce plateau signifie qu'aucune énergie ne s'échappe de la *fenêtre de circonscription*. Dans la deuxième phase, qui va de $z \simeq 700Km$ à $z \simeq 4600Km$, l'énergie $\tilde{E}_0(z)$ diminue continuellement, indiquant une fuite d'énergie de la *fenêtre de circonscription*. Dans la troisième phase, située au-delà, $z \simeq 4600Km$, on retrouve à nouveau un plateau (indiquant que l'énergie ne s'échappe plus de la *fenêtre de circonscription*). La présence de ce dernier plateau est la preuve que l'impulsion a bien exécuté un processus de rayonnement pendant la deuxième phase de sa dynamique, et que ce rayonnement ne s'effectue pas de manière perpétuelle mais plutôt sous la forme de l'émission d'une bouffée d'énergie.

(iii) La Figure 3.14 (c) montre que l'impulsion Gaussienne adopte un comportement qualitativement similaire à celui de l'impulsion Sech, à savoir, que l'impulsion commence et termine sa propagation en hypothermie ($\tilde{E}_0(z) < \tilde{E}_S$), avec deux plateaux plus clairement visibles. On peut toutefois remarquer que dans le cas de la Gaussienne, le processus de rayonnement prend fin à $z \simeq 2650Km$ c'est-à-dire, bien plus tôt que dans le cas de la sécante hyperbolique.

D'autre part, les Figures 3.15 montrent l'évolution de l'énergie de l'impulsion stationnaire affectée, à l'entrée du système, d'une petite perturbation. Les Figures 3.15 illustrent les six classes dynamiques d'une impulsion rayonnante représentées

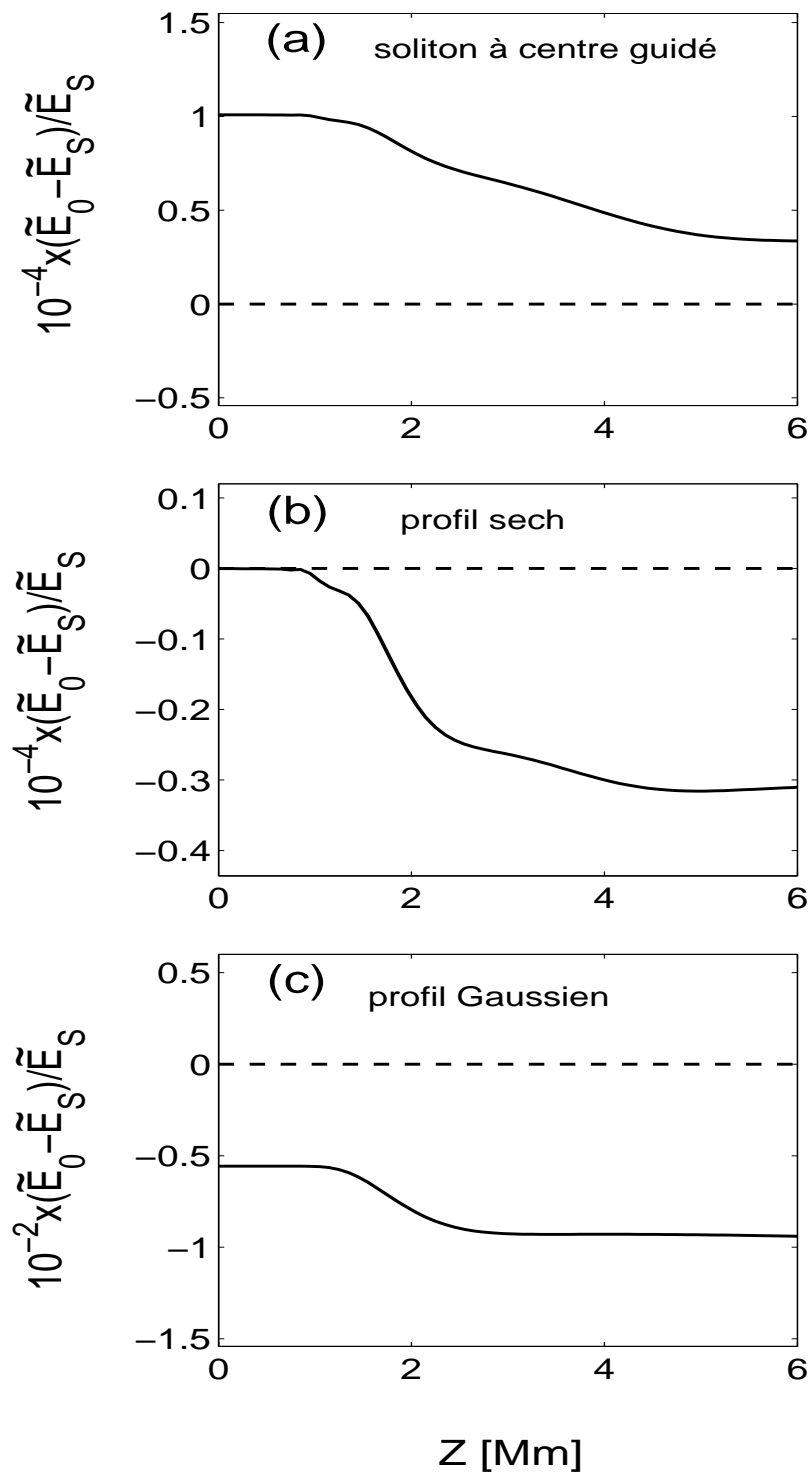


FIGURE 3.14 Evolution de l'énergie d'un soliton légèrement perturbé. La ligne en tirets représente l'évolution de l'énergie de l'impulsion stationnaire. Le profil initial de l'impulsion est indiqué dans chaque figure.

dans la Figure 3.7.

La Figure 3.15 (a) correspond à la dynamique du *soliton idéal*, représenté par l'étiquette (1) dans la Figure 3.7.

La Figure 3.15 (b) correspond au *soliton hyperthermique* représenté par l'étiquette (3a) dans la Figure 3.7, et caractérisé par une ECI positive. Le processus de rayonnement, qui n'est pas très spectaculaire dans cette figure, y est tout de même visible aux environs de $z \simeq 450Km$.

La Figure 3.15 (c) correspond au *soliton hyperthermique* représenté par l'étiquette (3b) dans la Figure 3.7, et caractérisé par une ECI négative. Le processus de rayonnement, qui est très spectaculaire dans cette Figure, débute aux environs de $z \simeq 1000Km$.

La Figure 3.15 (d) correspond au *soliton hypothermique* représenté par l'étiquette (5a) dans la Figure 3.7, et caractérisé par une ECI négative. Le processus de rayonnement n'est pas très spectaculaire dans cette Figure, mais il est visible aux environs de $z \simeq 450Km$.

La Figure 3.15 (e) correspond au *soliton hybride* représenté par l'étiquette (5b) dans la Figure 3.7, et caractérisé par une ECI négative et un processus de rayonnement qui provoque le basculement du soliton de l'état d'hyperthermie vers un état d'hypothermie.

La Figure 3.15 (f) correspond au *soliton hypothermique* représenté par l'étiquette (5c) dans la Figure 3.7, et caractérisé par une ECI négative.

La démonstration de l'existence de ces six classes de comportements dynamiques pour des impulsions rayonnantes constitue un des résultats majeurs de la présente étude.

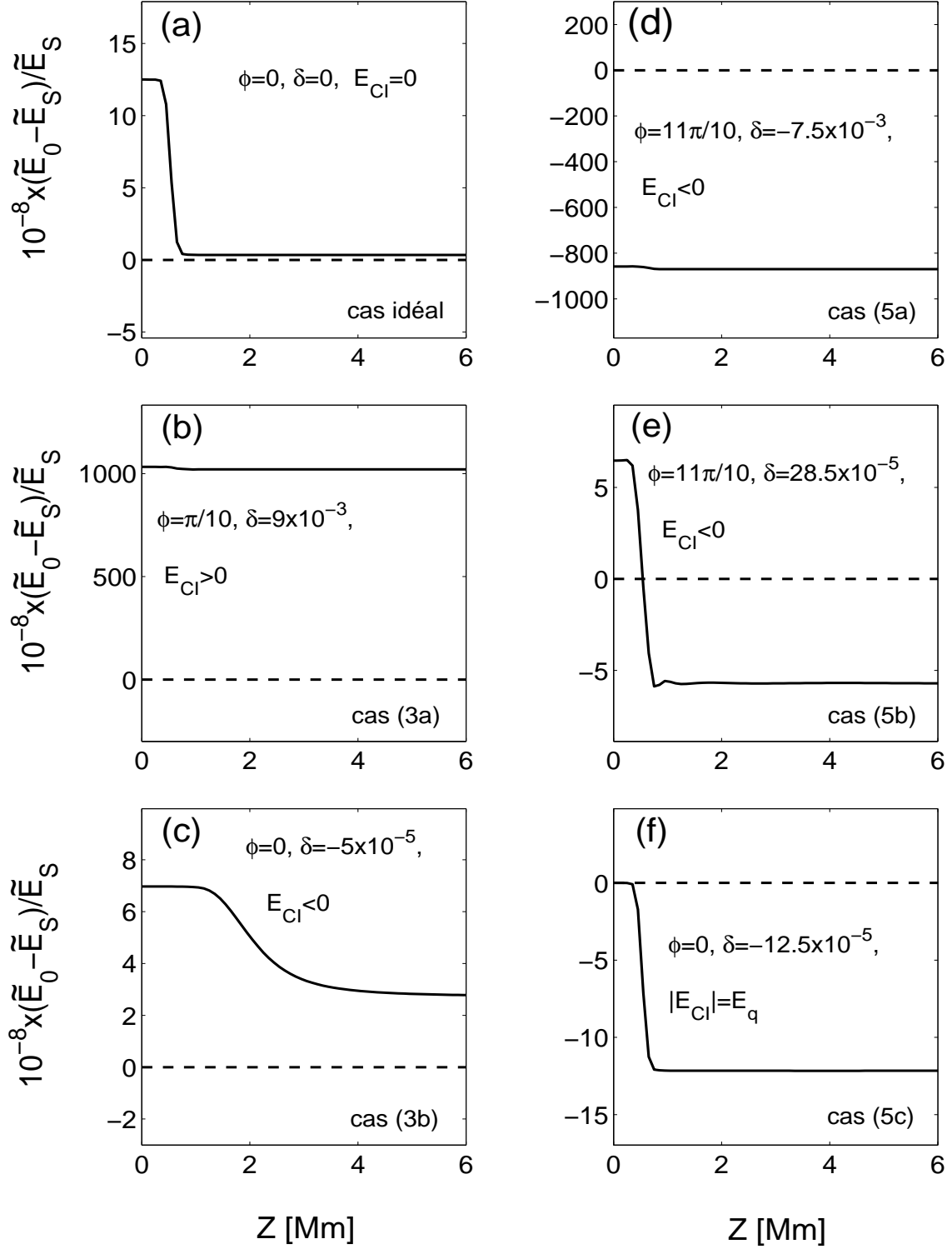


FIGURE 3.15 Evolution de l'énergie d'un soliton légèrement perturbé, pour différents profils de champ perturbateur, avec $\epsilon = 10^{-3}$ et $\eta = 1$.

3.5 Conclusion

Nous avons examiné dans ce chapitre le comportement dynamique d'une impulsion lumineuse au voisinage de son état stationnaire (qui correspond en principe à l'état de propagation le plus robuste de l'impulsion dans le guide d'onde). En effet, à défaut de pouvoir générer des impulsions dotées du profil le plus adapté au guide d'onde (profil stationnaire), en pratique, on s'efforce néanmoins de s'approcher au mieux de ce profil stationnaire. Malgré tout, l'injection d'une impulsion affectée d'une distorsion de profil par rapport au profil de l'impulsion stationnaire, et la perspective de propagation de cette impulsion dans l'environnement plus ou moins perturbé, justifient les questions et études relatives à la robustesse des impulsions dans les guides d'onde réels. Il est bien connu qu'une impulsion lumineuse subissant une perturbation ne reste pas inerte. Un de ses modes de réaction les plus spectaculaires est sans aucun doute l'émission d'un rayonnement.

Il était question pour nous d'examiner les comportements dynamiques des impulsions dotées (à l'entrée du guide d'onde) d'un profil temporel distordu mais relativement proche de celui de l'impulsion stationnaire, en incluant les comportements rayonnants et les comportements non rayonnants. Nous avons ainsi examiné les mécanismes physiques qui provoquent le rayonnement. Il en ressort que le rayonnement peut avoir une origine liée au support physique de transmission, ou au désaccord de profil entre le profil initial de l'impulsion injectée dans le guide d'onde et le profil stationnaire dans ce guide d'onde.

Par rapport au rayonnement lié au support physique, nous avons vu que ce type de rayonnement est dû à la structuration périodique de la ligne, qui donne lieu à la répétition du cycle pertes-amplification au cours de la propagation, et que ce rayonnement ne s'effectue pas de manière perpétuelle, mais que l'impulsion émet une petite bouffée d'énergie, tout en restructurant son profil de sorte à se rapprocher du profil stationnaire.

Pour ce qui est du rayonnement lié au désaccord de profil entre le profil initial de l'impulsion injectée dans la ligne de transmission et le profil stationnaire dans ce guide d'onde, notre analyse théorique de l'interaction entre l'impulsion et le champ perturbateur est basée sur l'hypothèse d'un processus d'interférence entre le champ

de l'impulsion et le champ perturbateur. Ce processus met en jeu une énergie de champ d'interférence que nous avons identifiée comme étant un des paramètres majeurs qui déterminent le caractère plus ou moins rayonnant d'une impulsion affectée d'une perturbation. Nous avons mis en évidence cinq grands types de comportements dynamiques, qui diffèrent considérablement selon le profil du champ perturbateur, la valeur et le signe de l'énergie du champ d'interférence.

En effet, lorsque l'énergie du champ d'interférence est nulle, l'impulsion peut expulser totalement la perturbation (sous forme de rayonnement), et retrouver l'énergie qu'elle avait avant la collision. Nous avons baptisé ce type d'impulsion : soliton isothermique. Lorsque l'énergie du champ d'interférence est positive, l'impulsion ne rayonne qu'une fraction du champ perturbateur. Elle capture en son sein une partie du champ perturbateur qui provoque une élévation de son énergie (par rapport à l'énergie de l'impulsion stationnaire). Nous avons baptisé ce type d'impulsion : soliton hyperthermique (ou soliton chaud). Lorsque l'énergie du champ d'interférence est négative, l'impulsion rayonne une fraction de la perturbation et capture l'autre fraction, mais le champ piégé provoque une diminution de son énergie. L'impulsion qui en résulte a été qualifiée de soliton hypothermique (ou soliton froid). Nous avons aussi identifié deux autres types de comportement correspondant à une capture de la totalité de la perturbation par le soliton, accompagné d'un abaissement ou d'une élévation de l'énergie de l'impulsion. Ce phénomène d'absorption de la perturbation se produit lorsque le champ perturbateur ne contient pas de modulation d'amplitude ou de phase pouvant être ressentie par le soliton. Le soliton est alors incapable de se restructurer pour générer des bandes latérales de rayonnement. Elle absorbe totalement la perturbation.

Nous avons également obtenu deux cas de solitons hybrides, dont l'un est caractérisé par le fait qu'il commence sa propagation en hyperthermie et la termine en hypothermie ($E_{CI} < 0$ et $E_q > |E_{CI}|$). Quand au second cas, il est caractérisé par le fait qu'il commence sa propagation en isothermie et la termine en hypothermie ($E_q = |E_{CI}|$).

Nous avons ainsi dressé la cartographie générale des types de comportement qu'une impulsion peut adopter au voisinage de son état stationnaire. Cette carto-

graphie constitue un progrès vers une meilleure compréhension des phénomènes de propagation dans les guides d'ondes, et fournit les clés d'accès aux processus de contrôle de la stabilité de propagation des impulsions lumineuses.

Chapitre 4

Etude du rayonnement impulsionnel dans les lignes de transmission à gestion de dispersion

4.1 Introduction

Parmi les concepts les plus innovants apparus au cours des deux dernières décennies dans le domaine de l'optique, figure le concept de la gestion de dispersion [92, 93, 94, 95, 96], qui a été proposé comme moyen de contrôle et de stabilisation de la dynamique interne des impulsions lumineuses se propageant dans une ligne de transmission par fibres optiques. Ce concept a provoqué l'émergence et le développement d'une impulsion lumineuse appelée *soliton à gestion de dispersion*, qui se caractérise par une robustesse exceptionnelle dans des environnements fortement perturbés. Cette qualité de robustesse justifie son emploi dans de nombreux systèmes de transmission récemment installés, qui acheminent de très hauts débits (plusieurs T_B/s) sur de très grandes distances (plusieurs milliers de km).

Physiquement, un soliton à gestion de dispersion se distingue de tous les autres types de solitons apparus jusqu'à présent dans la littérature par la structure de son profil temporel, qui contient d'importantes rugosités sur les fronts avant et arrière de l'impulsion. Ces rugosités sont couramment appelées "lobes latéraux". Malgré la pléthore de travaux réalisés au cours des deux dernières décennies sur les solitons

à gestion de dispersion, la problématique de la structure particulière de son profil temporel, et en particulier l'effet des lobes latéraux sur la stabilité de l'impulsion, ont été étonnamment négligés jusqu'à présent.

Le point clé de cette problématique réside dans le fait qu'au niveau pratique, le profil temporel d'un soliton à gestion de dispersion, du fait de sa complexité, n'est pas réalisable avec les technologies de modulation les plus avancées. En pratique, dans les activités de conception et d'optimisation des lignes de transmission à gestion de dispersion, on s'efforce généralement d'approcher au mieux le profil du soliton à gestion de dispersion par des profils de forme Gaussienne, et parfois par un profil de la forme d'une sinusoïde rehaussée. Dans tous les cas, les impulsions utilisées réellement dans ces systèmes de transmission ont un profil différent de celui de l'impulsion idéale. Cette distorsion de profil expose les impulsions à des effets de rayonnement pouvant pénaliser les performances des systèmes de communication, comme l'ont montré Ngabireng et al [23, 24]. Mais les travaux antérieurs n'ont pas abordé la question fondamentale suivante : Dans quelle classe énergétique se situent les impulsions de forme Gaussienne ou sécante hyperbolique dans les systèmes à gestion de dispersion ?

D'autre part, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une impulsion affectée d'une distorsion de profil par rapport au profil stationnaire n'émet pas forcément un rayonnement au cours de sa propagation. L'exemple le plus éclatant est sans doute le soliton à centre de Guidage (découvert par Hasegawa et Kodama), qui, bien que n'étant pas une impulsion stationnaire, exécute (dans une ligne à dispersion constante) une propagation de très haute stabilité sans émission de rayonnement. Le comportement dynamique non rayonnant étant d'un grand intérêt pour les systèmes de transmission en raison du fait qu'il correspond à une suppression des interactions à longue portée, on peut naturellement se demander si un tel comportement est possible dans une ligne à gestion de dispersion ?

Ce chapitre de thèse apporte des éléments de réponse aux questions posées ci-dessus. Plus généralement, ce chapitre examine les comportements rayonnants et non rayonnants dans des systèmes à gestion de dispersion, en fonction du profil de l'impulsion injectée dans le système. Le chapitre s'organise de la manière suivante : dans la deuxième section, nous présentons l'équation de propagation. La troisième

section est consacrée à l'identification de la classe dynamique d'un soliton perturbé. La quatrième section illustre quantitativement le comportement du soliton perturbé, et dans la cinquième section nous concluons ce chapitre.

4.2 Equation de propagation

La propagation des impulsions lumineuses dans une ligne de transmission à haute densité de gestion de la dispersion (DDM : Dense Dispersion Managed line) en présence de pertes et d'amplificateurs disposés périodiquement le long de la ligne de transmission (Figure 4.1), est gouvernée par l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée à coefficients variables suivante :

$$A_z + i\frac{\beta_2(z)}{2}A_{tt} + \frac{\alpha(z)}{2}A - i\gamma(z)|A|^2A = B[A] \quad (4.1)$$

où, $A(z, t)$ représente l'enveloppe du champ électrique. $\beta_2(z)$, $\alpha(z)$, et $\gamma(z)$ représentent respectivement le coefficient de dispersion, le coefficient d'atténuation, et le coefficient de non linéarité de la fibre. Le profil de la carte de dispersion $[\beta_2(z)]$ est représenté sur la Figure 4.1. L'opérateur B désigne l'action des amplificateurs destinés à compenser les pertes. Elle s'écrit :

$$B = (\sqrt{G} - 1) \times \sum_{n=1}^N \delta(z - nZ_A), \quad (4.2)$$

où N désigne le nombre d'amplificateurs, G le gain en puissance et Z_A le pas d'amplification. Un autre paramètre qui influence fortement la respiration de l'impulsion et les performances de la ligne à gestion de dispersion est la force de la carte de dispersion S définie par

$$S = \frac{L_2\beta_{22} - L_1\beta_{21}}{T_{fwhm}^2}. \quad (4.3)$$

Au cours de cette étude, nous avons utilisé les paramètres suivants pour la ligne de transmission : les fibres utilisées sont de type NZDSF (Non Zero Dispersion Shifted Fibers), avec $\beta_{21} = -2.5ps^2/km$, $\beta_{22} = 2.5ps^2/km$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.22dB/km$, $Z_A = 50Km$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2 \times 10^{-3}W^{-1}m^{-1}$, $L_1 = 439,0148m$, $L_2 = 438,01782m$, soit $S = 1.61$.

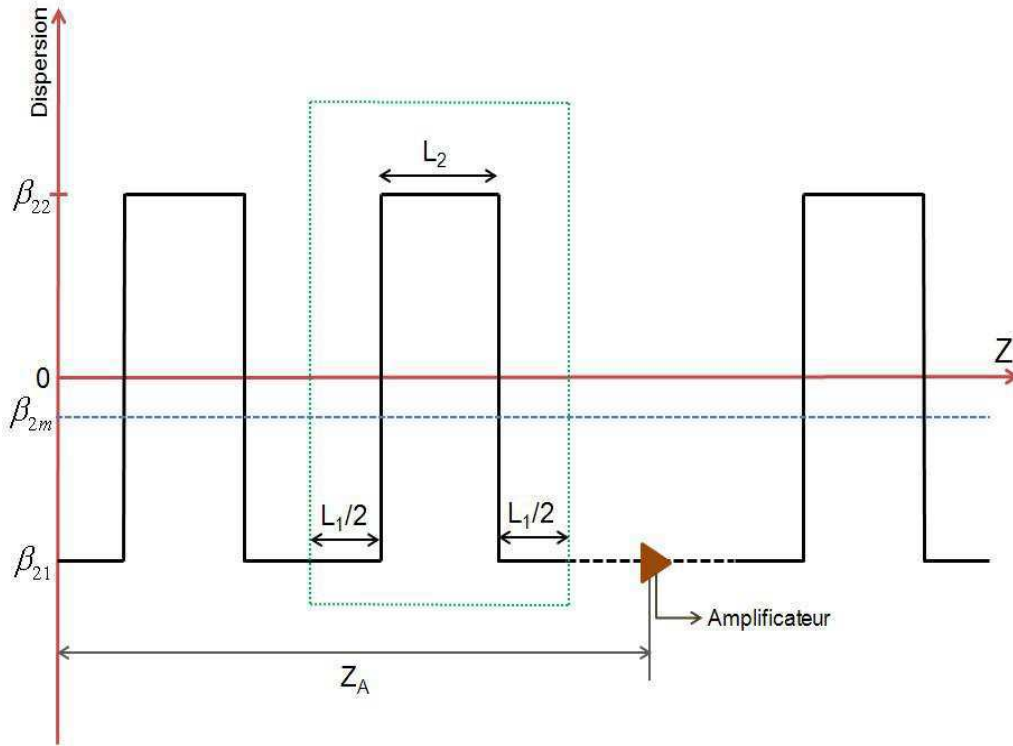


FIGURE 4.1 Schéma d'une ligne de transmission à haute densité de gestion de dispersion.

4.2.1 Point fixe - champ stationnaire

Une impulsion stationnaire notée A_S est une impulsion robuste dotée de la propriété de retour à sa forme initiale après chaque pas d'amplification. L'équation (4.1) n'ayant pas de solution analytique exacte, il n'existe donc pas d'expression analytique correspondant exactement à l'impulsion stationnaire dans une ligne à gestion de dispersion. Rappelons toutefois qu'il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer numériquement le profil stationnaire. L'une de ces méthodes est la méthode de Nijhof [27] décrite dans le chapitre précédent. En appliquant cette méthode, nous avons obtenu les profils de champ stationnaire représentés dans la Figure 4.2. Ces courbes démontrent les trois faits majeurs qui suivent :

- Le champ stationnaire a un profil temporel [Figure 4.2 (a1)] qui ne correspond à aucune expression analytique connue.
- Le profil spectral (Figure 4.2 b(1)) du champ stationnaire contient un grand nombre de petits lobes latéraux ; ce qui rend pratiquement impossible la synthèse

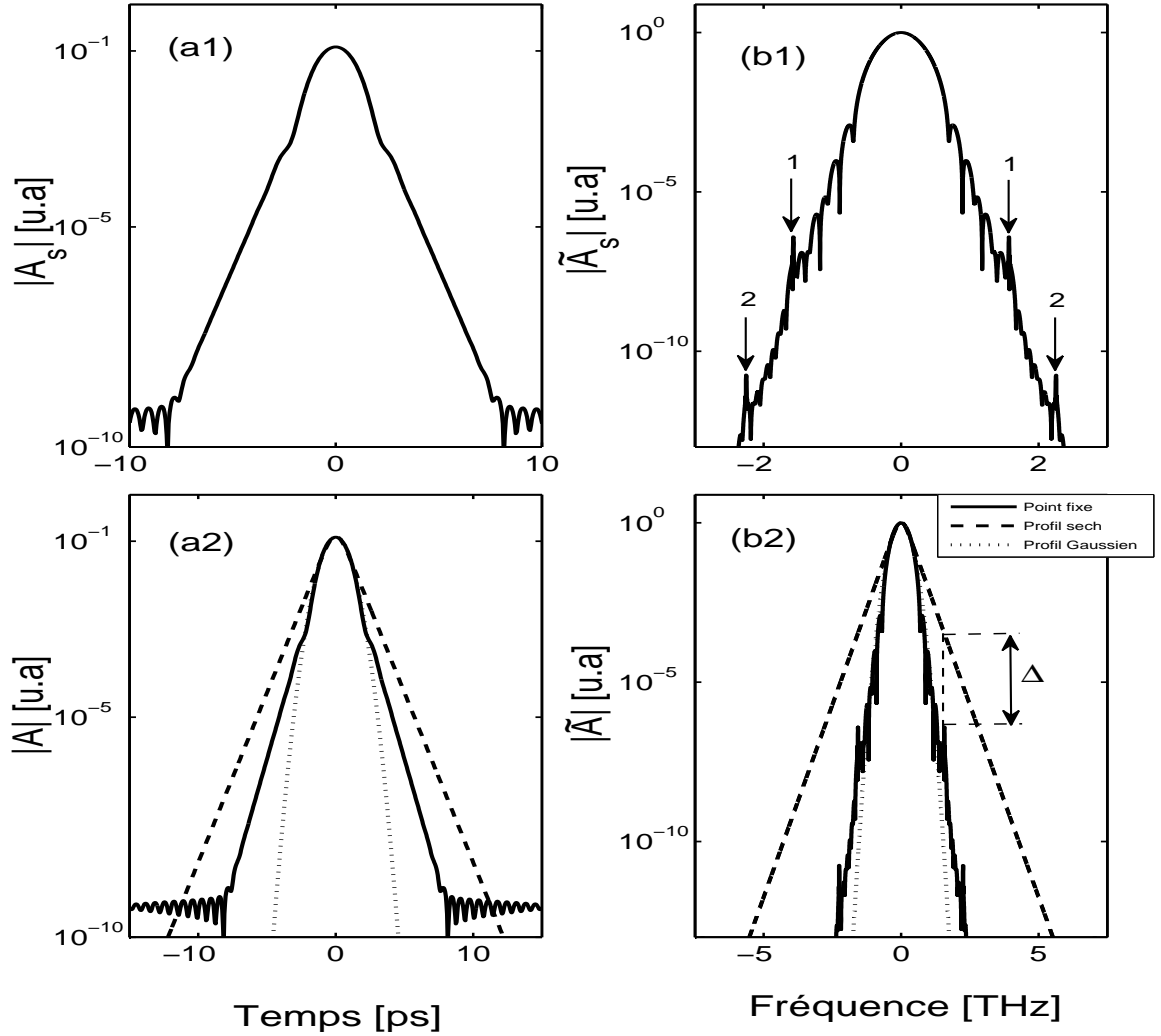


FIGURE 4.2 profil du champ stationnaire (a1) et (b1), et les profils de formes sécante hyperbolique et Gaussien les plus proches du profil stationnaire (a2) et (b2).

d'une telle impulsion.

- Un examen plus attentif du domaine spectral [Figure 4.2 (b1)], révèle la présence de bandes latérales (indiquées par des flèches verticales portant les numéros 1 et 2, encore appelées bandes de Kelly), dont l'origine est liée au caractère périodique du support physique de transmission. Rappelons que la ligne de transmission est une structure périodique de période Z_A . La présence de ces bandes latérales dans le profil du point fixe est une indication que l'impulsion stationnaire exécute en réalité une dynamique interne parfaitement périodique, qui lui est imposée par la structure du support physique (et plus précisément, par son caractère périodique et qui s'accom-

pagne de l'émission d'une bouffée de rayonnement). Il est également possible que l'impulsion émette une autre bouffée de rayonnement liée à la distorsion initiale de son profil. Cette deuxième forme de rayonnement, qui est généralement bien plus intense que celle associée aux bandes de Kelly, ne se produit pas systématiquement. Il est impossible de la prédire par un simple examen du profil de l'impulsion stationnaire. A partir de simulations numériques et en utilisant les paramètres donnés en début de la section 4.2, nous avons obtenu les fréquences des bandes de Kelly d'ordre 1 et 2 [indiquées par les chiffres 1 et 2 dans la Figure 4.2 (b1)] dont les valeurs sont consignées dans le tableau ci après :

<i>Ordre</i>	1	2
<i>Fréquences (THz)</i>	1.569	2.255

TAB. 4.1 Fréquences des bandes de Kelly induites par le support physique de transmission dans un système à gestion de dispersion

4.2.2 Equation de Propagation du rayonnement

Pour une compréhension et un traitement théorique rigoureux du processus de rayonnement, la connaissance du profil exact de l'impulsion stationnaire dans le guide d'onde est nécessaire. Le profil stationnaire (A_S) n'ayant pas un profil réalisable, l'une des techniques utilisées en pratique pour la conception des lignes de transmission à gestion de dispersion consiste à approcher le point fixe par des profils qui lui sont très proches (meilleur ansatz) que nous noterons dans la suite $A(\theta, t)$. L'intérêt d'utiliser le meilleur ansatz réside dans le fait que cette impulsion peut être générée à l'aide de dispositifs optiques ordinaires, et qu'elles peuvent se propager avec une excellente stabilité dans le guide d'onde. Dans le cas de la ligne de transmission considérée dans cette étude (Figure 4.1), les champs les plus proches du champ stationnaire ont des profils de forme sécante hyperbolique ou Gaussien, et sont représentés dans les Figures 4.2 (a2) et (b2). On tire de ces figures les faits majeurs suivants :

- L'impulsion dotée d'un profil de forme Gaussienne semble être la plus proche du champ stationnaire que l'impulsion dotée du profil sécante hyperbolique. En effet,

l'identification du profil le plus proche du champ stationnaire s'effectue par le biais du champ perturbateur, et plus précisément l'énergie qui lui est associée, qualifiée d'énergie du champ résiduel (ECR). Plus l'ECR sera petite, mieux l'ansatz représentera le champ stationnaire.

- Les profils des ansatz Sech et Gaussien [Figure 4.2 (a2)-(b2)] sont parfaitement lisses, aussi bien dans le domaine temporel que spectral. Ils ne contiennent donc pas de bandes de Kelly, ni de structure de petits lobes latéraux qui caractérisent le point fixe.

Rappelons que leurs profils temporels sont respectivement définis par les expressions suivantes :

$$A_{sech} = x_1 \operatorname{sech} \left(\frac{(t - x_2)}{x_3} \right) \exp \left(i \frac{x_4}{2} (t - x_2)^2 + i x_5 (t - x_2) + i x_6 \right) \quad (4.4)$$

$$A_{Gauss} = x_1 \exp \left(-\frac{(t - x_2)^2}{x_3^2} + i \frac{x_4}{2} (t - x_2)^2 + i x_5 (t - x_2) + i x_6 \right) \quad (4.5)$$

où $x_1, x_2, 2 \ln(\sqrt{2} + 1)x_3$ pour la Sech et $\sqrt{2 \ln(2)}x_3$ pour la Gaussienne, $x_4, x_5/2\pi$ et x_6 sont les coordonnées collectives de l'ansatz choisi, qui représentent respectivement, l'amplitude, la position temporelle, la largeur à mi-hauteur, le chirp, la fréquence et la phase de l'impulsion.

Cependant, le fait d'injecter dans la ligne le meilleur ansatz ($A = A_{sech}$, ou $A = A_{Gauss}$) plutôt que l'impulsion stationnaire A_S , revient à introduire dans le système de transmission une perturbation q tel que

$$q = A - A_S. \quad (4.6)$$

En substituant la relation (4.6) dans l'ESNL (4.1) et en se plaçant entre deux amplificateurs consécutifs, on obtient l'ESNL suivante qui modélise la dynamique du champ perturbateur q ,

$$\frac{\partial q}{\partial z} + i \frac{\beta_2(z)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\alpha(z)}{2} q - i \gamma(z) |q|^2 q = i \gamma(z) (2 |A_S|^2 q + A_S^2 q^*), \quad (4.7)$$

où les termes d'interaction d'ordre supérieur (en q^2) ont été négligés. De plus nous avons tenu compte du fait que le champ A_S est solution stationnaire de l'ESNL

$$\frac{\partial A_S}{\partial z} + i \frac{\beta_2(z)}{2} \frac{\partial^2 A_S}{\partial t^2} + \frac{\alpha(z)}{2} A_S - i \gamma(z) |A_S|^2 A_S = 0. \quad (4.8)$$

Le champ perturbateur q peut se décomposer en deux parties :

$$q = q_r + q_p, \quad (4.9)$$

où le champ q_p représente la contribution statique (c'est-à-dire, le champ piégé dans la partie centrale de l'impulsion). Rappelons que ce champ interagit fortement avec l'impulsion stationnaire et modifie la dynamique globale interne. Le champ q_r , qui est une contribution dynamique, correspond au rayonnement. Ce champ interagit fortement avec l'impulsion uniquement en début de propagation, pendant la phase de restructuration du profil initial de l'impulsion conduisant à l'émergence des bandes latérales de rayonnement. Rappelons également que cette restructuration du profil initial s'effectue par une inter-modulation de phase induite par le premier terme du membre de droite de l'équation (4.7). L'équation de propagation du rayonnement peut alors être approchée de la manière suivante :

$$\frac{\partial q_r}{\partial z} + i \frac{\beta_2(z)}{2} \frac{\partial^2 q_r}{\partial t^2} + \frac{\alpha(z)}{2} q_r - i \gamma(z) |q_r|^2 q_r = 2i \gamma(z) |A_S|^2 q_r. \quad (4.10)$$

Etant donné que le profil utilisé n'est pas le champ stationnaire, et que plusieurs ansatz (sech, Gaussien, ...) peuvent être utilisés pour représenter au mieux le champ stationnaire, la connaissance du champ perturbateur est d'une importance capitale. Car elle peut servir de guide dans le choix de l'ansatz le mieux adapté à la ligne de transmission. De plus, elle permet de prévoir le comportement rayonnant ou non rayonnant de l'ansatz choisi. Les courbes de la Figure 4.3 représentent les champs perturbateurs associés respectivement à un ansatz de profil sech [4.3 (a1)-(b1)] et un ansatz de profil Gaussien [4.3 (a2)-(b2)].

Le fait le plus remarquable dans le profil du champ perturbateur associé à l'impulsion Sech [4.3 (a1)] est une structure oscillatoire (contenant quatre périodes d'oscillations). Cette structure oscillatoire comporte un nombre de périodes suffisant pour provoquer une restructuration de l'impulsion (en début de propagation) conduisant à la création de bandes latérales de rayonnement. Ainsi donc, la présence de cette structure oscillatoire nous permet de prédire que cette impulsion adoptera au cours de sa propagation un comportement rayonnant. D'autre part, on peut remarquer l'absence anormale de bandes latérales de Kelly dans le spectre du champ perturbateur [4.3 (b1)]. En fait, les bandes de Kelly sont ici simplement masquées par une amplitude

très importante de l'ensemble du champ perturbateur, comme nous pouvons l'observer dans la Figure 4.2 (b2), où Δ représente le désaccord de profil entre l'ansatz Sech et le champ stationnaire à la fréquence 1.569 THz.

Dans le cas de l'impulsion de forme Gaussienne [Figure 4.3 (a2) et (b2)], le champ perturbateur présente un nombre relativement élevé de périodes d'oscillation ($6T_{Gauss}$) dans le domaine temporel [Figure 4.3 (a2)]. La présence de cette structure oscillatoire nous permet aussi de prédire un comportement rayonnant pour cette impulsion. Toutefois, le nombre élevé de périodes d'oscillation ne nous permet pas de préjuger de l'ampleur de l'énergie que l'impulsion pourra rayonner au cours de sa propagation. Contrairement au profil Sech, on observe clairement dans le cas de l'impulsion Gaussienne, la présence des bandes de Kelly dans le spectre du champ perturbateur. Ces bandes sont indiquées par des flèches verticales dans la Figure 4.3 (b2). Leur présence est rendue visible par le fait que l'amplitude générale du champ perturbateur est relativement faible, ce qui indique au passage que le profil Gaussien est beaucoup plus proche du profil stationnaire que ne l'est le profil Sech.

4.3 Identification de la classe dynamique du soliton perturbé

Nous avons défini dans le chapitre précédent un ensemble de paramètres permettant de prédire le comportement dynamique de l'impulsion optique. Parmi ces paramètres figure l'énergie du champ perturbateur E_q , définie par

$$E_q = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(0, t)|^2 dt, \quad (4.11)$$

et l'énergie du champ d'interférence définie par

$$E_{CI} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{CI}(0, t) dt, \quad (4.12)$$

où $P_{CI}(0, t) = q^*(0, t)A_S(0, t) + q(0, t)A_S^*(0, t)$ représente la puissance du champ d'interférence. Le troisième paramètre important est l'énergie reçue, que nous noterons E_{re} , et qui est définie par

$$E_{re} = E_0 - E_S = E_q + E_{CI}, \quad (4.13)$$

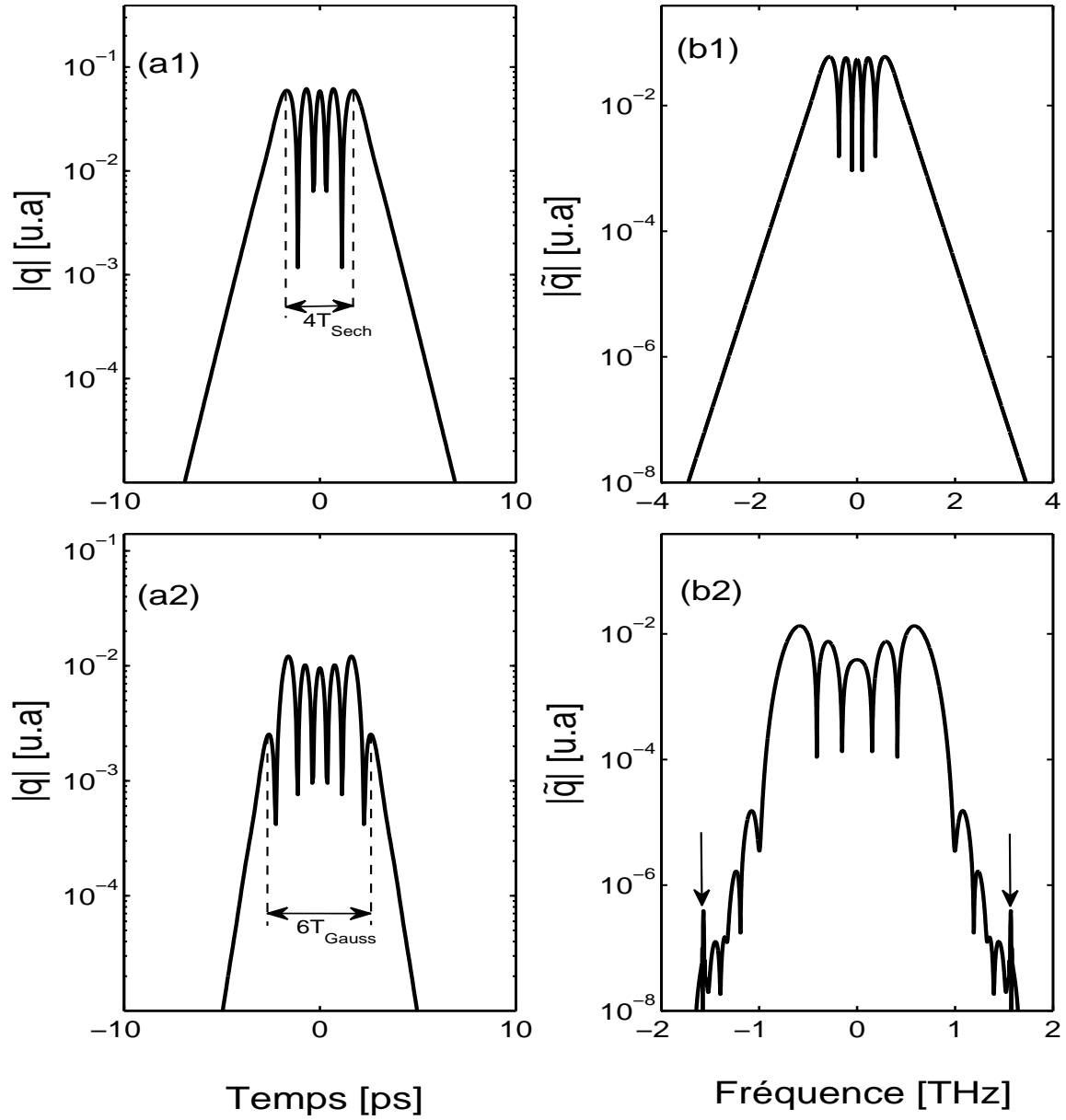


FIGURE 4.3 Profils du champ de perturbation correspondant à l'injection de la sécante hyperbolique la plus proche du point fixe (a1) et (b1) et de la Gaussienne la plus proche du point fixe (a2) et (b2).

où $E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(0, t)|^2 dt$ représente l'énergie initiale de l'impulsion et $E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_S(0, t)|^2 dt$ l'énergie initiale du champ stationnaire. L'exploitation de ces paramètres a permis de confirmer l'existence des cinq grandes classes de comportement que nous avons mises en évidence dans le chapitre précédent, et auxquelles nous avons attribué les qualificatifs respectifs suivants : soliton idéal, soliton hyperthermique rayonnant, soliton

hyperthermique non rayonnant, soliton hypothermique rayonnant et soliton hypothermique non rayonnant. Dans ce qui suit nous verrons comment les solitons à gestion de dispersion se positionnent dans cette classification.

4.3.1 Prédiction de la classe dynamique des impulsions les plus proches du point fixe de profil de forme sécante hyperbolique et Gaussienne

Rappelons que dans le cas de la ligne à gestion de dispersion les impulsions les plus proches du point fixe ont un profil qui peut être de forme sécante hyperbolique ou Gaussienne, selon la valeur du paramètre de respiration. Cependant, l'utilisation de tels profils équivaut à introduire un champ perturbateur q dans la ligne de transmission. L'évaluation de l'énergie de la perturbation initiale (E_q), de l'ECI (E_{CI}), et de l'énergie reçue (E_{re}), nous a permis d'identifier la classe dynamique de ces impulsions (visible dans le Tableau 4.2).

Energies en $[pJ]$	Meilleur ajustement sécante hyperbolique(A_{sech})	Meilleur ajustement Gaussien (A_{Gauss})
E_{CI}	-3.7977×10^{-4}	-1.0809×10^{-5}
E_q	1.9111×10^{-4}	5.4047×10^{-6}
E_{re}	-1.8866×10^{-4}	-5.4047×10^{-6}
Comportement dynamique	Soliton hypothermique rayonnant	Soliton hypothermique rayonnant

TAB. 4.2 Classification des comportements dynamiques, pour le soliton de profil sécante hyperbolique, et pour le soliton de profil Gaussien.

De ce tableau, il ressort que les impulsions de profil de forme sécante hyperbolique et Gaussienne sont des solitons hypothermiques rayonnants. En effet, ces impulsions commencent leur propagation en hypothermie car $E_{re} < 0$. Par ailleurs, la présence d'une structure oscillatoire dotée de plusieurs périodes de modulation dans le profil

du champ perturbateur [voir Figure 4.3 (a1)-(a2)] nous permet de prédire que ces deux impulsions émettront un rayonnement, après quoi l'impulsion poursuivra et terminera sa propagation avec une énergie plus basse qu'à l'entrée de la ligne. Ainsi donc, le Tableau 4.2 et les Figures 4.3 nous conduisent à prédire que les impulsions Sech et Gaussienne les plus proches de l'impulsion stationnaire sont des solitons hypothermiques rayonnants.

4.3.2 Identification de la classe dynamique des impulsions (Sech et Gaussienne) les plus proches du point fixe

Pour une identification directe du comportement dynamique des impulsions les plus proches du point fixe, nous avons évalué leurs énergies $\tilde{E}_0(z)$, ainsi que celle du champ stationnaire $\tilde{E}_S(z)$, sur une distance de propagation de $6000Km$. Rappelons que cette évaluation s'est faite au moyen d'une fenêtre temporelle de référence centrée à l'origine du référentiel propre de l'impulsion, que nous avons appelée *fenêtre de circonscription de l'impulsion*. Cette fenêtre, qui a une largeur de $1.5T_B$, englobe la quasi totalité de l'énergie de l'impulsion (plus de 90%). Quantitativement, ces énergies sont définies par :

$$\tilde{E}_0(z) = \int_{-\frac{3T_B}{4}}^{\frac{3T_B}{4}} |A(z, t)|^2 dt, \quad (4.14)$$

$$\tilde{E}_S(z) = \int_{-\frac{3T_B}{4}}^{\frac{3T_B}{4}} |A_S(z, t)|^2 dt, \quad (4.15)$$

où A désigne respectivement A_{sech} et A_{Gauss} dans la relation (4.14).

Les Figures 4.4 confirment remarquablement les prédictions faites précédemment. En effet, la Figure 4.4 (a) obtenue avec le profil initial de forme Sech, et la Figure 4.4 (b) obtenue avec le profil de forme Gaussienne, montrent bien que les deux impulsions considérées se classent dans la catégorie des solitons hypothermiques rayonnants. Elles commencent leur propagation en régime d'hypothermie et la termine dans le même régime. De plus, on observe dans ces figures trois phases de comportement dynamique.

Dans le cas du profil de forme Sech [Figure 4.4 (a)], on observe un premier plateau entre 0 et $250km$, qui traduit le fait qu'aucune énergie ne s'échappe de la fenêtre de circonscription. Cette phase correspond à la période au cours de laquelle l'impulsion

restructure son profil sans aucune perte d'énergie. Dans la deuxième phase qui va de 250 à 3500 km , comporte une décroissance rapide entre 250 km et 2000 km puis une décroissance lente entre 2000 km et 3500 km . On remarque que l'énergie de l'impulsion diminue continuellement, ce qui indique que l'énergie s'échappe progressivement de la fenêtre de circonscription. C'est durant cette période que l'impulsion, toujours en cours de restructuration, exécute un processus de rayonnement qui provoque un abaissement de son énergie. Au-delà de 3500 km , nous trouvons à nouveau un plateau, qui traduit le fait que l'énergie ne s'échappe plus de la fenêtre de circonscription. Le début de ce dernier plateau masque la fin de l'émission de la bouffée de rayonnement. Dès lors, l'impulsion évolue de manière stable dans une configuration différente de celle qu'elle avait initialement.

Dans le cas du profil initial de forme Gaussienne [Figure 4.4 (b)], le comportement dynamique est similaire à celui de la sécante hyperbolique. On peut simplement remarquer qu'ici le processus de rayonnement s'effectue de la manière un peu plus brève (entre 250 et 1500 km).

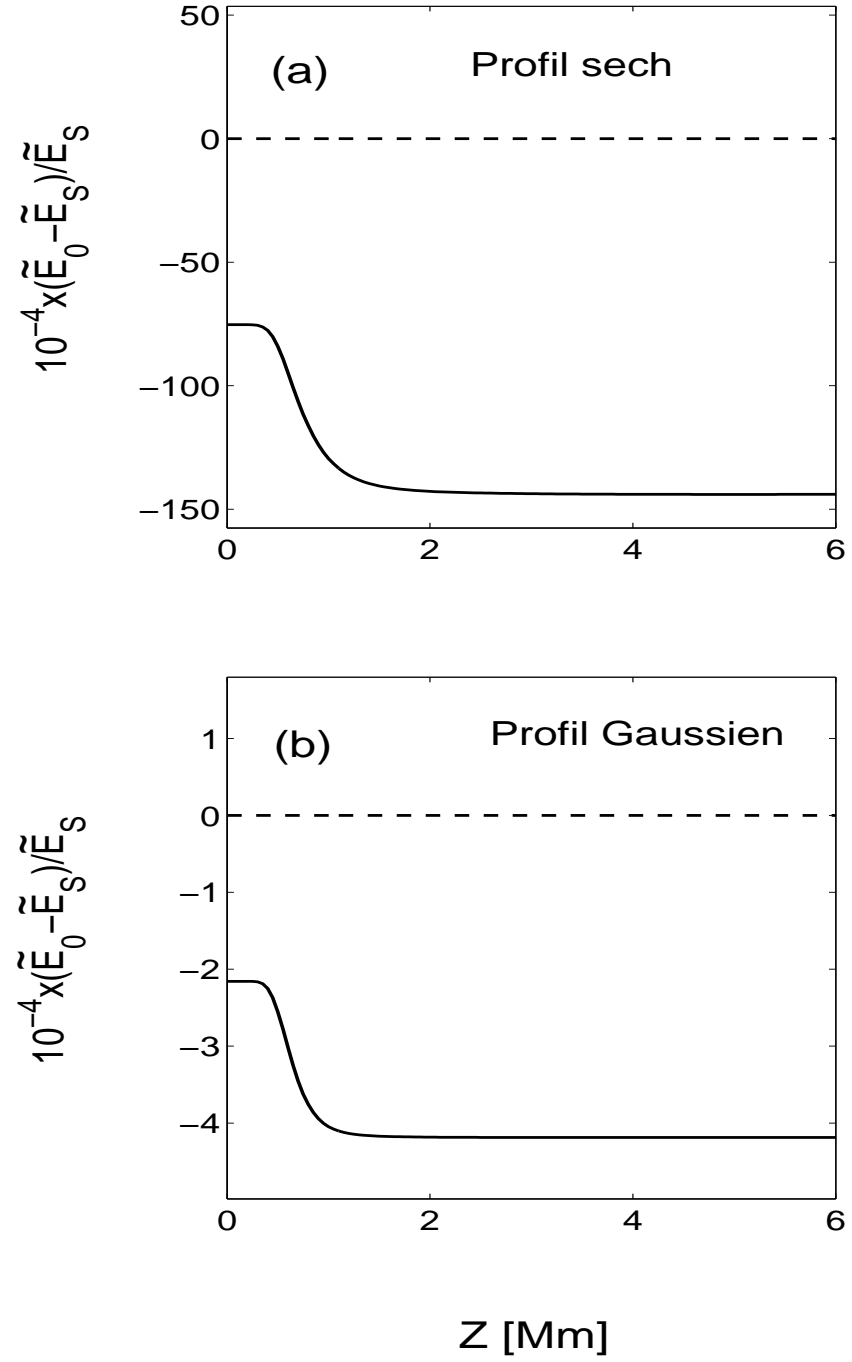


FIGURE 4.4 Evolution de l'écart d'énergie entre l'impulsion injectée (Sech et Gaussienne) et l'impulsion stationnaire. La ligne en tirets représente l'évolution de l'énergie de l'impulsion stationnaire.

4.4 Illustration quantitative du comportement rayonnant du soliton perturbé

Pour évaluer quantitativement la dynamique de l'impulsion perturbée, l'un des critères d'évaluation du caractère plus ou moins rayonnant d'une impulsion perturbée est l'énergie du champ rayonné E_R . Cette énergie correspond à l'énergie de la composante du champ perturbateur située à l'extérieur de la fenêtre de circonscription (composante délocalisée ou champ rayonné). A une distance l de l'entrée de la ligne de transmission, cette énergie est définie par :

$$E_R(l) = \int_{-\infty}^{-\frac{3T_B}{4}} |q(l, t)|^2 dt + \int_{+\frac{3T_B}{4}}^{+\infty} |q(l, t)|^2 dt. \quad (4.16)$$

L'énergie de la composante localisée (champ piégé situé à l'intérieur de la fenêtre de circonscription) est définie par :

$$E_P(l) = \int_{-\frac{3T_B}{4}}^{+\frac{3T_B}{4}} |q(l, t)|^2 dt. \quad (4.17)$$

4.4.1 Cas des impulsions les plus proches du champ stationnaire

4.4.1.1 Illustration quantitative du rayonnement associé à l'impulsion sécante hyperbolique

Les Figures 4.5 illustrent le comportement rayonnant de la sécante hyperbolique la plus proche du champ stationnaire. On distingue parfaitement sur la Figure 4.5 (a) les deux vagues de rayonnement qui s'éloignent progressivement de la fenêtre de circonscription. Précisons que nous n'avons représenté ici que la composante délocalisée q_r du champ perturbateur q . En effet, ici le champ piégé q_p est si important que sa présence masque le champ rayonné. On peut aussi noter que la sech rayonne 90% de l'énergie de la perturbation initiale E_{q_0} [Figure 4.5 (c)], et qu'après le rayonnement, l'énergie piégée est équivalente à $-1.9E_{q_0}$.

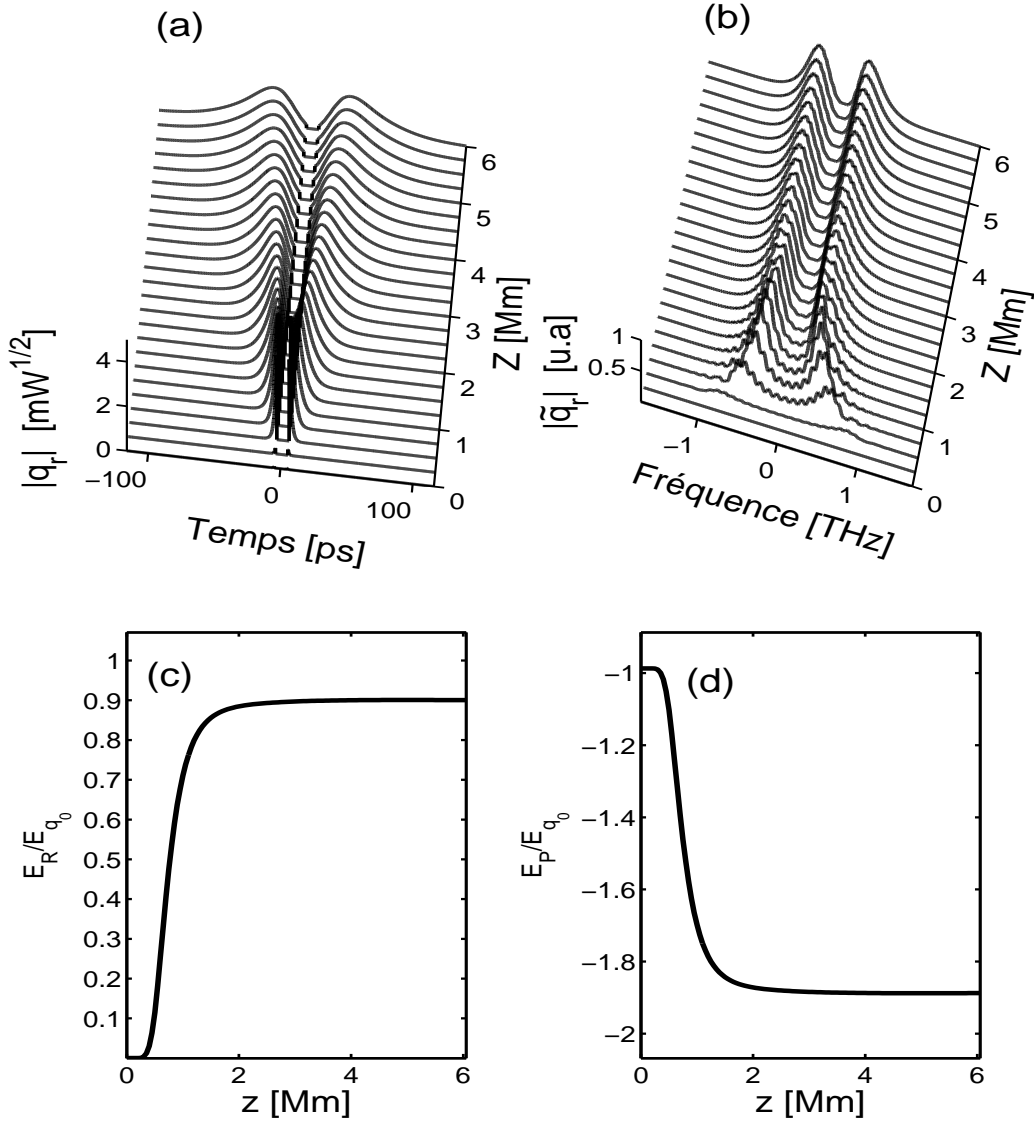


FIGURE 4.5 Evolution du champ perturbateur associé à l'impulsion Sech la plus proche du champ stationnaire.

4.4.1.2 Illustration quantitative du rayonnement associé à l'impulsion Gaussienne

Les Figures 4.6 illustrent le comportement rayonnant de la Gaussienne la plus proche du point fixe. Dans la Figure 4.6 (a) on observe clairement le champ piégé au centre du repère de l'impulsion, ainsi que les deux vagues de rayonnement qui s'en éloignent. Les courbes d'énergie [Figure 4.6 (c) et (d)] révèlent un comportement similaire à celui de l'impulsion de profil Sech, mais avec 94.12% d'énergie rayonnée par rapport à l'énergie de la perturbation initiale E_{q_0} , et une énergie piégée équivalente

à $-1.94E_{q_0}$.

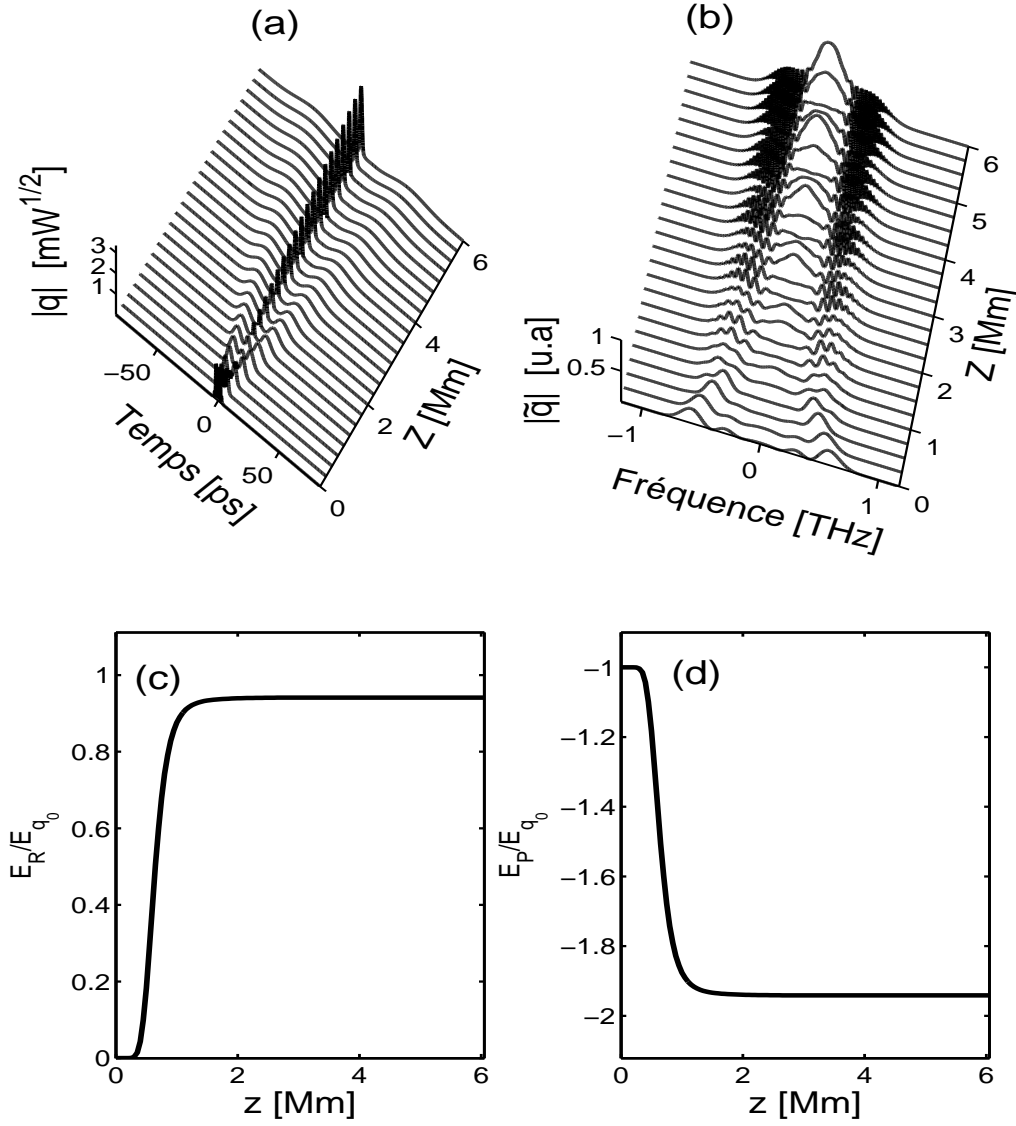


FIGURE 4.6 Evolution du champ perturbateur associé à l'impulsion Gaussienne la plus proche du champ stationnaire.

4.4.2 Cas des impulsions de profil quelconque mais proche du champ stationnaire

Pour illustrer quantitativement le comportement, d'une impulsion quelconque dans une ligne de transmission à gestion de dispersion, une fois de plus, nous avons

choisi une perturbation de la forme :

$$q(0, t) = \xi(0, t)A_S(0, t), \quad (4.18)$$

où le champ $\xi(0, t)$ est arbitrairement choisi sous la forme suivante :

$$\xi(0, t) = \frac{\varepsilon}{2}[\eta \sin(\Omega_0 t + \phi) + \delta] \exp \left[i(\phi_0 + \frac{a}{2}t^2) \right], \quad (4.19)$$

où les paramètres de cette fonction sont exactement les mêmes que ceux définis dans le chapitre précédent.

4.4.2.1 Soliton idéal

On peut obtenir ce type de soliton lorsque $\delta = \phi_0 = a = 0$, ce qui conduit à une énergie du champ d'interférence nulle. On observe un rayonnement total du champ perturbateur qui se manifeste par l'apparition de deux vagues de rayonnement [Figure 4.7 (a)-(b)] correspondant respectivement aux bandes latérales Stokes et anti-Stokes, et par l'absence de champ piégé. Les courbes de la Figure 4.7 (c)-(d) représentent l'énergie rayonnée E_R/E_{q_0} et l'énergie piégée E_P/E_{q_0} rapportée à l'énergie de la perturbation initiale E_{q_0} . Ces courbes confirment le rayonnement total d'un tel soliton avec $E_R = E_{q_0}$.

Comparativement à une ligne à dispersion constante, il n'existe pas de champ résiduel au centre de la fenêtre temporelle de l'impulsion résultant de l'interaction entre les bandes latérales de rayonnement Stokes et Anti-Stokes. Cette absence de champ résiduel dans les lignes de transmission à gestion de dispersion se justifie par le fait que les deux bandes latérales de rayonnement sont suffisamment éloignées pour ne pas interagir.

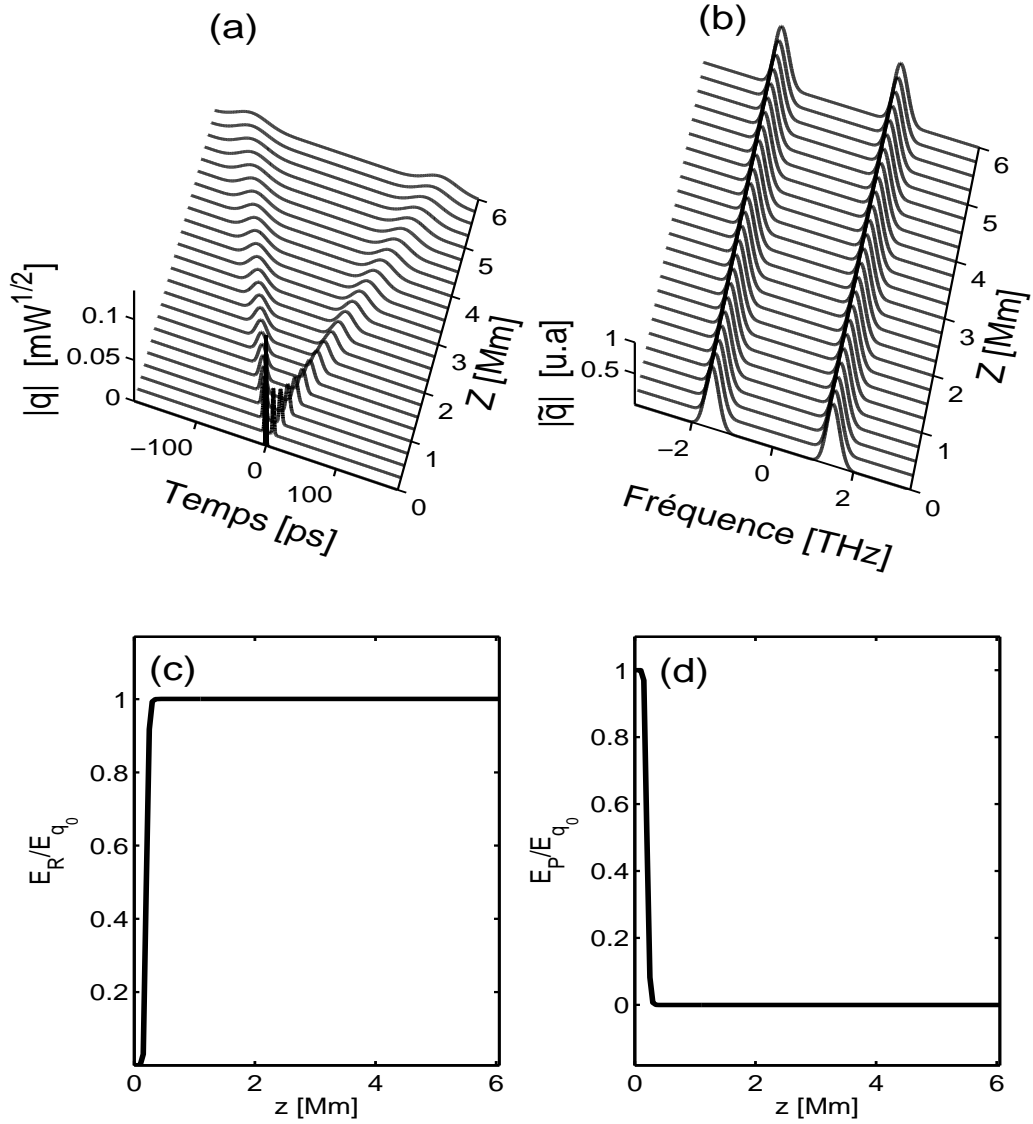


FIGURE 4.7 Evolution du profil et de l'énergie du champ perturbateur dans le cas du soliton idéal.

4.4.2.2 Soliton hyperthermique non rayonnant

Les Figures 4.8 illustrent le comportement dynamique d'un soliton hyperthermique non rayonnant, obtenu pour $\delta = 0.6, \phi_0 = a = 0$. On remarque clairement dans les Figures 4.8 (a) et (b) que l'impulsion ne rayonne quasiment pas. Cependant, nous avons constaté que dans le cas des lignes à gestion de dispersion, l'impulsion parvient à absorber la quasi-totalité de la perturbation, et se propage avec elle sur de longues distances de propagation (6000km) sans se déstabiliser. Par ailleurs, les

courbes d'énergies des Figures 4.8 (c) et (d) montrent une très faible énergie de rayonnement, de l'ordre de 0.1% de l'énergie de perturbation initiale.

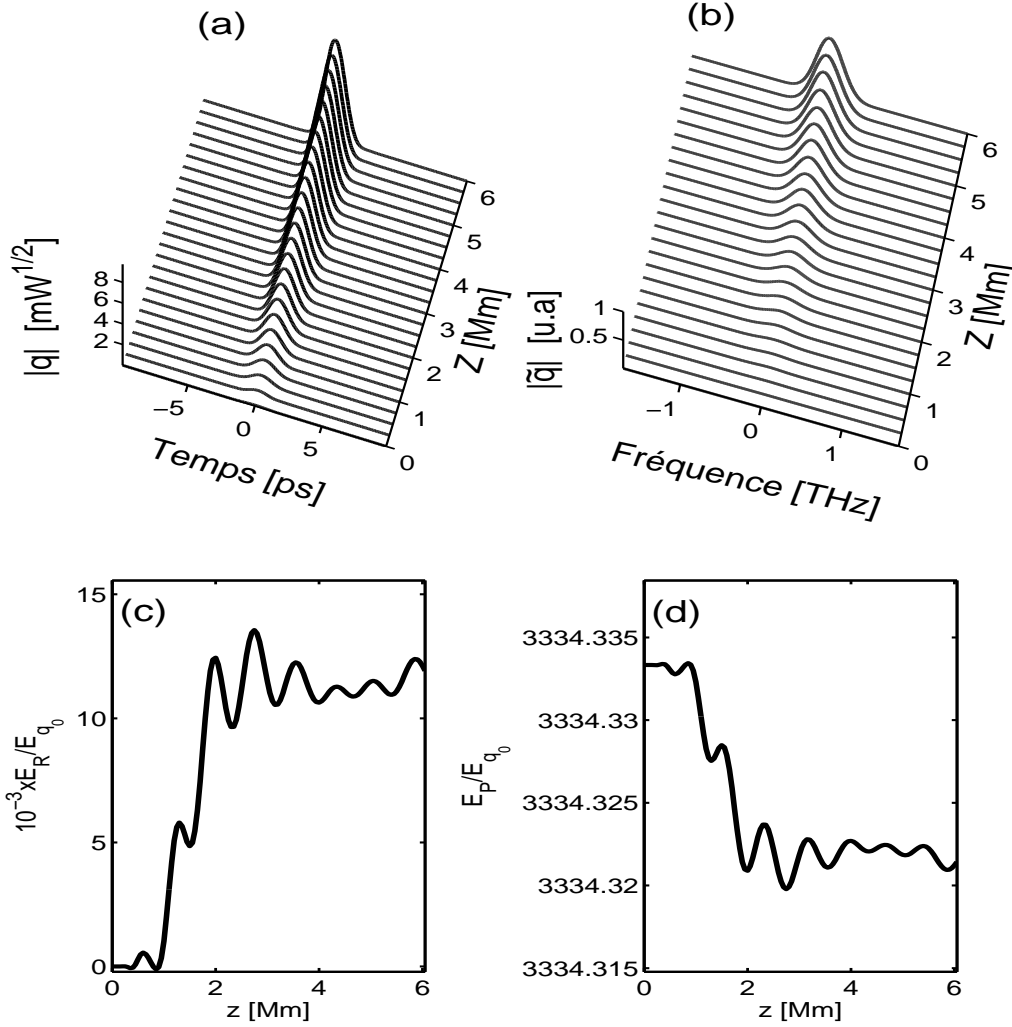


FIGURE 4.8 Evolution du profil et de l'énergie du champ perturbateur dans le cas du soliton hyperthermique non rayonnant.

4.5 Conclusion

Nous avons examiné les comportements rayonnants et non rayonnants des impulsions dans les lignes de transmission à gestion de dispersion.

Dans ce chapitre, nous nous sommes d'abord focalisé sur les comportements dynamiques liés à l'injection d'impulsions de formes sécante hyperbolique et Gaussienne. Nous avons démontré que ces deux types de profils d'impulsion donnent lieu à un

rayonnement. Nous avons ensuite examiné le cas général d'une impulsion dotée d'un profil quelconque, mais dont l'allure est relativement proche du profil du champ stationnaire. Il en ressort que l'apparition d'un comportement rayonnant est subordonnée à l'existence d'une structure oscillatoire dans le profil temporel du champ perturbateur. Cette structure oscillatoire constitue l'élément déclencheur du processus de rayonnement, qui se traduit par une décomposition du champ perturbateur en deux parties : l'une reste piégée au sein de l'impulsion tandis que l'autre se sépare de l'impulsion jusqu'à devenir une entité totalement indépendante de l'impulsion (qui est précisément le rayonnement). Par ailleurs, nous avons observé que la puissance du champ rayonné, rapportée à celle du champ perturbateur initial, est estimable de manière prédictive à l'aide de l'énergie associée au champ d'interférence (résultant de l'interaction initiale entre la perturbation et l'impulsion stationnaire). Cette observation est en tout point similaire à celle que nous avons faite dans le chapitre précédent sur la propagation des solitons dans une ligne non gérée en dispersion.

Enfin, nous avons démontré que dans une ligne à gestion de dispersion, le comportement dynamique d'une impulsion au voisinage de son état stationnaire s'intègre dans la grille générale des classes dynamiques que nous avons établie dans le chapitre précédent. Nous avons ainsi démontré, que les impulsions de profils sécante hyperbolique et Gaussien sont des solitons hypothermiques rayonnants. Nous avons aussi mis en évidence des impulsions perturbées capables d'expulser totalement le champ perturbateur sous forme de rayonnement, de même que des impulsions perturbées capables d'absorber toute la perturbation initiale et de se propager sur de longues distances (distances transocéaniques) sans se déstabiliser.

Chapitre 5

Etude du rayonnement impulsionnel par la méthode des coordonnées collectives.

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons effectué une étude du comportement rayonnant de divers types d'impulsions optiques dotées initialement d'un profil proche de celui de l'impulsion stationnaire. La méthode utilisée consistait dans la résolution directe des ESNL couplées associant le champ de l'impulsion à ceux des rayonnements Stokes et Anti-Stokes. Il ressort notamment des travaux des chapitres précédents que le processus de rayonnement se déroule en deux phases bien distinctes. La première phase correspond à une activité de restructuration de l'impulsion au cours de laquelle les composantes spectrales des ondes de rayonnement sont créées. Dans le domaine temporel, les champs électriques respectifs de l'impulsion et du rayonnement, qui sont initialement totalement imbriqués, se séparent progressivement. Ensuite le système dynamique entre dans une seconde phase au cours de laquelle le rayonnement acquiert définitivement sa propre identité.

L'objet de ce chapitre est d'examiner la faisabilité d'une analyse du comportement rayonnant d'une impulsion par l'approche des coordonnées collectives, et plus particulièrement, l'approche des équations variationnelles. Rappelons que la méthode des coordonnées collectives a un double intérêt : D'une part, elle est beaucoup plus rapide que la méthode de résolution directe des équations de propagation. D'autre

part, la méthode des coordonnées collectives permet une caractérisation détaillée des ondes de rayonnement. Autrement dit, elle donne accès aux principaux paramètres physiques du rayonnement, ainsi que leur évolution au cours de la propagation.

5.2 Considérations qualitatives générales

5.2.1 Cas des systèmes à gestion de dispersion

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, une ligne à gestion de dispersion est modélisable à l'aide de l'équation de Schrödinger non linéaire (ESNL) suivante :

$$\psi_z + i\frac{\beta_2(z)}{2}\psi_{tt} + \frac{\alpha(z)}{2}\psi = i\gamma(z)|\psi|^2\psi, \quad (5.1)$$

qui modélise l'évolution de l'enveloppe du champ entre deux amplificateurs consécutifs. La première étape de notre approche des coordonnées collectives consiste à décomposer le champ impulsif de la manière suivante :

$$\psi = f + R_A + R_S, \quad (5.2)$$

où f , R_A et R_S représentent respectivement les champs de l'impulsion, du rayonnement anti-Stokes et du rayonnement Stokes. Cette décomposition suppose que les ondes de rayonnement sont suffisamment distinctes, pour pouvoir être considérées comme des entités ayant chacune une identité propre. De plus, ces ondes de rayonnement étant de très faible amplitude (par rapport à celle de l'impulsion), en substituant la relation (5.2) dans (5.1) et en conservant uniquement les termes d'interaction majeure et en négligeant les termes de couplage incohérents et de mélange à quatre ondes car ces termes qui jouent un rôle important dans le processus de restructuration spectrale (en début de propagation) conduisant à la formation des bandes latérales de rayonnement, n'ont plus d'effet sur la dynamique de l'impulsion perturbée une fois les bandes de rayonnement formées pour certains termes, et d'autres termes ne permettent plus de décrire la dynamique de l'impulsion perturbée une fois les bandes de rayonnement formées. On peut décomposer l'ESNL sous la forme du système d'équations

suivant :

$$f_z + i \frac{\beta_2(z)}{2} f_{tt} - i\gamma(z) |f|^2 f = 2i\gamma(z) (|R_A|^2 + |R_S|^2) f - \frac{\alpha(z)}{2} f \quad (5.3)$$

$$R_{Az} + i \frac{\beta_2(z)}{2} R_{Att} - i\gamma(z) |R_A|^2 R_A = 2i\gamma(z) (|f|^2 + |R_S|^2) R_A - \frac{\alpha(z)}{2} R_A \quad (5.4)$$

$$R_{Sz} + i \frac{\beta_2(z)}{2} R_{Stt} - i\gamma(z) |R_S|^2 R_S = 2i\gamma(z) (|f|^2 + |R_A|^2) R_S - \frac{\alpha(z)}{2} R_S. \quad (5.5)$$

Ce système d'équations ne prend en compte que les interactions par modulation de phase croisée entre chaque onde et les deux autres ondes présentes dans le système. La seconde étape de notre approche consiste à introduire les coordonnées collectives dans le système des trois ondes. A cette fin, on approche la solution des systèmes (5.3), (5.4) et (5.5) par des fonctions analytiques, appelées ansatz, qui sont choisies pour représenter au mieux les profils de l'impulsion stationnaire et des ondes de rayonnement. Le soliton à gestion de dispersion peut être approché par un ansatz de la forme Gaussienne

$$f_g = x_1 \exp \left(-\frac{(t - x_2)^2}{x_3^2} + i \frac{x_4}{2} (t - x_2)^2 + ix_5 (t - x_2) + ix_6 \right), \quad (5.6)$$

ou de la forme sécante hyperbolique

$$f_s = x_1 \operatorname{sech} \left(\frac{(t - x_2)}{x_3} \right) \exp \left(i \frac{x_4}{2} (t - x_2)^2 + ix_5 (t - x_2) + ix_6 \right). \quad (5.7)$$

Nous approcherons le profil temporel des rayonnements Stokes et anti-Stokes par des ansatz Gaussiens

$$R_A = \hat{y}_1 \exp \left(-\frac{(t - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2} + i \frac{\hat{y}_4}{2} (t - \hat{y}_2)^2 + i\hat{y}_5 (t - \hat{y}_2) + i\hat{y}_6 \right) \quad (5.8)$$

$$R_S = \tilde{y}_1 \exp \left(-\frac{(t - \tilde{y}_2)^2}{\tilde{y}_3^2} + i \frac{\tilde{y}_4}{2} (t - \tilde{y}_2)^2 + i\tilde{y}_5 (t - \tilde{y}_2) + i\tilde{y}_6 \right). \quad (5.9)$$

5.2.1.1 Dynamique d'une impulsion non perturbée par le rayonnement

En négligeant la réaction du rayonnement sur l'impulsion, l'ESNL (5.3) devient :

$$f_z + i \frac{\beta_2(z)}{2} f_{tt} - i\gamma(z) |f|^2 f = -\frac{\alpha(z)}{2} f, \quad (5.10)$$

où ($f \equiv f_g$ ou $f \equiv f_s$). En appliquant la méthode des opérateurs de projection réduits (OPR) [97] sur l'équation (5.10) nous obtenons

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1\alpha(z) + \frac{1}{2}x_1x_4\beta_2(z) \quad (5.11a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_5\beta_2(z) \quad (5.11b)$$

$$\dot{x}_3 = -x_3x_4\beta_2(z) \quad (5.11c)$$

$$\dot{x}_4 = \left(-\frac{\Gamma_1}{x_3^4} + x_4^2\right)\beta_2(z) - \frac{\Gamma_2x_1^2}{x_3^2}\gamma(z) \quad (5.11d)$$

$$\dot{x}_5 = 0 \quad (5.11e)$$

$$\dot{x}_6 = \left(-\frac{1}{2}x_5^2 + \frac{\Gamma_3}{x_3^2}\right)\beta_2(z) + \Gamma_4x_1^2\gamma(z) \quad (5.11f)$$

où les coefficients Γ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) diffèrent selon que l'ansatz est Gaussien ou de forme Sech, et sont définis dans le Tableau 5.1.

<i>Ansatz</i>	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
<i>Gaussien</i>	4	$\sqrt{2}$	1	$\frac{5\sqrt{2}}{8}$
<i>Sech</i>	$\frac{30}{\pi^4}$	$\frac{30}{\pi^4}$	$\frac{1}{6} + \frac{5}{4\pi^2}$	$\frac{2}{3} + \frac{5}{4\pi^2}$

TAB. 5.1 Coefficients Γ_j avec $j = 1, 2, 3, 4$

Ici, il est important de noter que, si $x_5(0) = 0$, alors $x_5(z) = 0$ et $x_2(0) = 0$ pour tout z . Cela signifie qu'en absence de tout rayonnement ou de toute réaction significative du rayonnement sur l'impulsion, cette dernière restera au centre de son référentiel de repos au cours de la dynamique. Si au contraire, à l'entrée de la fibre, l'impulsion venait à se trouver en décalage de fréquence par rapport à sa porteuse, $x_5(0) = x_{50} \neq 0$, ce décalage n'évoluerait pas au cours de la propagation, mais provoquerait une dérive temporelle de l'impulsion par rapport au centre de son référentiel de repos $x_2(z) = -x_{50} \int_0^z \beta_2(z) dz$.

5.2.1.2 Dynamique de l'impulsion subissant une réaction du rayonnement

Dans le cas d'un soliton fortement rayonnant, il est possible que le rayonnement ait un certain effet sur l'impulsion. Dans ce cas il est instructif d'examiner la manière dont la réaction s'effectue sur l'impulsion. En appliquant la méthode de l'opérateur de projection réduit à l'équation (5.3) nous obtenons le système d'équations variationnelles suivant pour une impulsion décrite par un ansatz Gaussien :

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1\alpha(z) + \frac{1}{2}x_1x_4\beta_2(z) \quad (5.12a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_5\beta_2(z) \quad (5.12b)$$

$$\dot{x}_3 = -x_3x_4\beta_2(z) \quad (5.12c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \left(-\frac{4}{x_3^4} + x_4^2 \right) \beta_2(z) - \frac{\sqrt{2}x_1^2}{x_3^2} \gamma(z) + \\ & \gamma(z) \left(\frac{8\hat{y}_1^2\hat{y}_3 \left(-x_3^2 - \hat{y}_3^2 + 4(x_2 - \hat{y}_2)^2 \right) \exp \left(-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{x_3^2 + \hat{y}_3^2} \right)}{(x_3^2 + \hat{y}_3^2)^{\frac{5}{2}}} \right. \end{aligned} \quad (5.12d)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{8\tilde{y}_1^2\tilde{y}_3 \left(-x_3^2 - \tilde{y}_3^2 + 4(x_2 - \tilde{y}_2)^2 \right) \exp \left(-\frac{2(x_2 - \tilde{y}_2)^2}{x_3^2 + \tilde{y}_3^2} \right)}{(x_3^2 + \tilde{y}_3^2)^{\frac{5}{2}}} \Big) \\ \dot{x}_5 = & 8\gamma(z) \left(\frac{\hat{y}_1^2\hat{y}_3 (x_2 - \hat{y}_2) \exp \left(-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{x_3^2 + \hat{y}_3^2} \right)}{(x_3^2 + \hat{y}_3^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\tilde{y}_1^2\tilde{y}_3 (x_2 - \tilde{y}_2) \exp \left(-\frac{2(x_2 - \tilde{y}_2)^2}{x_3^2 + \tilde{y}_3^2} \right)}{(x_3^2 + \tilde{y}_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (5.12e)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & \left(-\frac{1}{2}x_5^2 + \frac{1}{x_3^2} \right) \beta_2(z) + \frac{5}{8}\sqrt{2}x_1^2\gamma(z) \\ & + \gamma(z) \left(\frac{\hat{y}_1^2\hat{y}_3 \left(3x_3^4 + 5x_3^2\hat{y}_3^2 + 2\hat{y}_3^4 - 4x_3^2(x_2 - \hat{y}_2)^2 \right) \exp \left(-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{x_3^2 + \hat{y}_3^2} \right)}{(x_3^2 + \hat{y}_3^2)^{\frac{5}{2}}} \right. \\ & + \frac{\tilde{y}_1^2\tilde{y}_3 \left(3x_3^4 + 5x_3^2\tilde{y}_3^2 + 2\tilde{y}_3^4 - 4x_3^2(x_2 - \tilde{y}_2)^2 \right) \exp \left(-\frac{2(x_2 - \tilde{y}_2)^2}{x_3^2 + \tilde{y}_3^2} \right)}{(x_3^2 + \tilde{y}_3^2)^{\frac{5}{2}}} \Big) \end{aligned} \quad (5.12f)$$

Pour une impulsion décrite par un ansatz sech, nous obtenons le système d'équations variationnelles suivant :

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1\alpha(z) + \frac{1}{2}x_1x_4\beta_2(z) \quad (5.13a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_5\beta_2(z) \quad (5.13b)$$

$$\dot{x}_3 = -x_3x_4\beta_2(z) \quad (5.13c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \left(-\frac{30}{\pi^4 x_3^4} + x_4^2 \right) \beta_2(z) - \frac{30x_1^2}{\pi^4 x_3^2} \gamma(z) \\ & + \frac{\gamma(z)}{x_1 x_3^2 \pi^2} \left(\hat{y}_1^2 \exp \left[-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2} \right] \int_0^{+\infty} \frac{(15 - \frac{180}{\pi^2} \ln(u)^2) \exp \left(\frac{-2x_3^2}{\hat{y}_3^2} \ln(u)^2 \right)}{(u^2 + 1) u^{\frac{4x_3(x_2 - \hat{y}_2)}{\hat{y}_3^2}}} du \right. \\ & \left. + \tilde{y}_1^2 \exp \left[-\frac{2(x_2 - \tilde{y}_2)^2}{\tilde{y}_3^2} \right] \int_0^{+\infty} \frac{(15 - \frac{180}{\pi^2} \ln(u)^2) \exp \left(\frac{-2x_3^2}{\tilde{y}_3^2} \ln(u)^2 \right)}{(u^2 + 1) u^{\frac{4x_3(x_2 - \tilde{y}_2)}{\tilde{y}_3^2}}} du \right) \end{aligned} \quad (5.13d)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 = & \frac{24\gamma(z)}{x_1 x_3 \pi^2} \left(\hat{y}_1^2 \exp \left[-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2} \right] \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u) \exp \left(\frac{-2x_3^2}{\hat{y}_3^2} \ln(u)^2 \right)}{(u^2 + 1) u^{\frac{4x_3(x_2 - \hat{y}_2)}{\hat{y}_3^2}}} du \right. \\ & \left. + \tilde{y}_1^2 \exp \left[-\frac{2(x_2 - \tilde{y}_2)^2}{\tilde{y}_3^2} \right] \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u) \exp \left(\frac{-2x_3^2}{\tilde{y}_3^2} \ln(u)^2 \right)}{(u^2 + 1) u^{\frac{4x_3(x_2 - \tilde{y}_2)}{\tilde{y}_3^2}}} du \right) \end{aligned} \quad (5.13e)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & \left(-\frac{1}{2}x_5^2 + \frac{1}{6x_3^2} + \frac{5}{4\pi^2 x_3^2} \right) \beta_2(z) + x_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4\pi^2} \right) \gamma(z) \\ & + \frac{\gamma(z)}{24x_1 \pi^2} \left(\hat{y}_1^2 \exp \left[-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2} \right] \int_0^{+\infty} \frac{(63\pi^2 - 180 \ln(u)^2) \exp \left(\frac{-2x_3^2}{\hat{y}_3^2} \ln(u)^2 \right)}{(u^2 + 1) u^{\frac{4x_3(x_2 - \hat{y}_2)}{\hat{y}_3^2}}} du \right. \\ & \left. + \tilde{y}_1^2 \exp \left[-\frac{2(x_2 - \tilde{y}_2)^2}{\tilde{y}_3^2} \right] \int_0^{+\infty} \frac{(63\pi^2 - 180 \ln(u)^2) \exp \left(\frac{-2x_3^2}{\tilde{y}_3^2} \ln(u)^2 \right)}{(u^2 + 1) u^{\frac{4x_3(x_2 - \tilde{y}_2)}{\tilde{y}_3^2}}} du \right) \end{aligned} \quad (5.13f)$$

Les termes proportionnels à $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / (x_3^2 + \hat{y}_3^2) \right]$ et $\exp \left[-2(x_2 - \tilde{y}_2)^2 / (x_3^2 + \tilde{y}_3^2) \right]$ (dans les membres de droite des équations (5.12d), (5.12e) et (5.12f)) ou ceux proportionnels à $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / \hat{y}_3^2 \right]$ et $\exp \left[-2(x_2 - \tilde{y}_2)^2 / \tilde{y}_3^2 \right]$ (dans les membres de droite des équations (5.13d), (5.13e) et (5.13f)) correspondent respectivement à la réaction des rayonnements Anti-Stokes et Stokes sur l'impulsion. Ces termes d'interaction s'annulent lorsque l'écart $x_2 - \hat{y}_2$ (ou $x_2 - \tilde{y}_2$) devient suffisamment grand ; Autrement dit, lorsque l'écart temporel entre l'impulsion et le rayonnement devient suffisamment grand. Le second point important à noter dans les équations (5.12d) et

(5.12e) ou (5.13d) et (5.13e) est l'influence directe du rayonnement sur le chirp (x_4) et la fréquence (x_5) de l'impulsion. Les conséquences de cette interaction diffèrent considérablement selon que l'impulsion est immobile [$x_2(z) = 0$] ou en mouvement [$x_2(z) \neq 0$] par rapport à son repère propre. Par souci de clarté, nous allons examiner séparément ces deux situations.

(i) Cas du rayonnement symétrique

La situation $x_2(z) = 0$ se produit lorsque l'impulsion commence sa propagation sans aucun décalage en fréquence par rapport à sa fréquence porteuse [$x_5(z) = 0$]. Dans ce cas, l'impulsion génère des ondes de rayonnement (R_S et R_A) et interagit avec elles de manière parfaitement symétrique, ce qui implique que $\tilde{y}_2 = -\hat{y}_2$, $\tilde{y}_3 = \hat{y}_3$ et $\tilde{y}_1 = \hat{y}_1$. Les deux termes présents dans le second membre de l'équation (5.12e) [ou (5.13e)], qui sont des termes d'interaction associés respectivement aux ondes R_S et R_A , acquièrent le même module et des signes opposés. En d'autre terme, pour $x_2 = 0$, les ondes de rayonnement Stokes et Anti-Stokes exercent sur la fréquence de l'impulsion des forces de même intensité et de sens inverses, qui se neutralisent : on a donc $\dot{x}_5 = 0$, conduisant à $x_5(z) = 0$ et $x_2(z) = 0$. Bien au contraire, les rayonnements Stokes et Anti-Stokes exercent sur le chirp de l'impulsion des effets de même intensité et même sens, comme le montrent les deux derniers termes du membre de droite de l'équation de (5.12d) ou (5.13d), qui se cumulent pour donner $16\gamma(z)y_1^2y_3\frac{(-x_3^2-y_3^2+4y_2^2)}{(x_3^2+y_3^2)^{5/2}}\exp\left[-\frac{2y_2^2}{(x_3^2+y_3^2)}\right]$ pour l'ansatz Gaussien [et $\frac{2\gamma(z)}{x_1x_3^2\pi^2}y_1^2\exp\left[-\frac{2(x_2-y_2)^2}{y_3^2}\right]\int_0^{+\infty}\frac{(15-\frac{180}{\pi^2}\ln(u)^2)\exp\left(\frac{-2x_3^2}{y_3^2}\ln(u)^2\right)}{(u^2+1)u\frac{4x_3(x_2-y_2)}{y_3^2}}du$ pour la Sech], où $y_2 \equiv \tilde{y}_2 = -\hat{y}_2$, $y_3 \equiv \tilde{y}_3 = \hat{y}_3$, $y_1 \equiv \tilde{y}_1 = \hat{y}_1$. Cette action directe sur le chirp est convertie en une action sur la largeur et l'amplitude de l'impulsion, via la dispersion, comme le montrent les équations (5.12a) et (5.12c) [ou (5.13a) et (5.13c)].

(ii) Cas du rayonnement asymétrique

La situation $x_2(z) \neq 0$ se produit lorsque l'impulsion commence sa propagation avec un décalage en fréquence [$x_5(0) \neq 0$]. La dispersion convertit ce décalage en dérive temporelle, comme l'illustre l'équation (5.12b). Ainsi donc, les ondes de rayonnement sont alors générées par une impulsion en mouvement. Ce mouvement la rapproche obligatoirement de l'une des ondes de rayonnement, qui peut être R_S ou R_A selon le signe de $x_5(0)$. En d'autres termes, les écarts de positions $|x_2 - \hat{y}_2|$ et

$|x_2 - \tilde{y}_2|$ deviennent différents. Conséquemment, les termes d'interaction de l'impulsion avec les ondes R_s et R_A n'ont plus la même intensité. Leurs effets sur la fréquence de l'impulsion s'effectuent toujours en sens inverse mais sans pouvoir totalement se contrebalancer (comme dans le cas symétrique) : $\dot{x}_5 \neq 0$. La réaction globale du rayonnement sur l'impulsion se traduit alors par un petit décalage supplémentaire de la fréquence de l'impulsion, qui vient se superposer au décalage initial.

5.2.1.3 Analyse des coordonnées collectives du rayonnement

L'interaction entre le rayonnement Stokes R_s et le rayonnement Anti-Stokes R_A étant très faible (et donc négligeable), les équations de propagation du rayonnement deviennent respectivement :

$$R_{Az} + i\frac{\beta_2(z)}{2}R_{Att} - i\gamma(z)|R_A|^2 R_A = i2\gamma|f|^2 R_A - \frac{\alpha(z)}{2}R_A \quad (5.14)$$

$$R_{Sz} + i\frac{\beta_2(z)}{2}R_{Stt} - i\gamma(z)|R_S|^2 R_S = i2\gamma|f|^2 R_S - \frac{\alpha(z)}{2}R_S \quad (5.15)$$

La détermination des coordonnées collectives du rayonnement Anti-Stokes à partir de la relation (5.14) nous donne, si nous adoptons pour l'impulsion un profil de forme Gaussienne, le système d'équations ci-après :

$$\dot{\hat{y}}_1 = -\frac{1}{2}\hat{y}_1\alpha(z) + \frac{1}{2}\hat{y}_1\hat{y}_4\beta_2(z) \quad (5.16a)$$

$$\dot{\hat{y}}_2 = -\hat{y}_5\beta_2(z) \quad (5.16b)$$

$$\dot{\hat{y}}_3 = -\hat{y}_3\hat{y}_4\beta_2(z) \quad (5.16c)$$

$$\dot{\hat{y}}_4 = \left(-\frac{4}{\hat{y}_3^4} + \hat{y}_4^2\right)\beta_2(z) - \frac{\sqrt{2}\hat{y}_1^2}{\hat{y}_3^2}\gamma(z) + 8\gamma(z)x_1^2x_3 \exp\left[-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{x_3^2 + \hat{y}_3^2}\right] \times \Delta_0 \quad (5.16d)$$

$$\dot{\hat{y}}_5 = 8\gamma(z)x_1^2x_3 \exp\left[-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{x_3^2 + \hat{y}_3^2}\right] \times \Delta_1 \quad (5.16e)$$

$$\dot{\hat{y}}_6 = \left(-\frac{1}{2}\hat{y}_5^2 + \frac{1}{\hat{y}_3^2}\right)\beta_2(z) + \frac{5}{8}\sqrt{2}\hat{y}_1^2\gamma(z) + \gamma(z)x_1^2x_3 \exp\left[-\frac{2(x_2 - \hat{y}_2)^2}{x_3^2 + \hat{y}_3^2}\right] \times \Delta_2 \quad (5.16f)$$

avec

$$\Delta_0 = \frac{(-x_3^2 - \hat{y}_3^2 + 4(x_2 - \hat{y}_2)^2)}{(x_3^2 + \hat{y}_3^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.17a)$$

$$\Delta_1 = \frac{(x_2 - \hat{y}_2)}{(x_3^2 + \hat{y}_3^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.17b)$$

$$\Delta_2 = \frac{(2x_3^4 + 5x_3^2\hat{y}_3^2 + 3\hat{y}_3^4 - 4\hat{y}_3^2(x_2 - \hat{y}_2)^2)}{(x_3^2 + \hat{y}_3^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (5.17c)$$

En adoptant pour l'impulsion un profil de forme Sech, nous obtenons le système ci-après :

$$\dot{\hat{y}}_1 = -\frac{1}{2}\hat{y}_1\alpha(z) + \frac{1}{2}\hat{y}_1\hat{y}_4\beta_2(z) \quad (5.18a)$$

$$\dot{\hat{y}}_2 = -\hat{y}_5\beta_2(z) \quad (5.18b)$$

$$\dot{\hat{y}}_3 = -\hat{y}_3\hat{y}_4\beta_2(z) \quad (5.18c)$$

$$\dot{\hat{y}}_4 = \left(-\frac{4}{\hat{y}_3^4} + \hat{y}_4^2\right)\beta_2(z) - \frac{\sqrt{2}\hat{y}_1^2}{\hat{y}_3^2}\gamma(z) - \gamma(z)\frac{32\sqrt{2}x_3x_1^2}{\hat{y}_3^5}\exp\left[-2\frac{(x_2 - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2}\right] \times \Delta_0 \quad (5.18d)$$

$$\dot{\hat{y}}_5 = \gamma(z)\frac{32\sqrt{2}x_3x_1^2}{\sqrt{\pi}\hat{y}_3^3}\exp\left[-2\frac{(x_2 - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2}\right] \times \Delta_1 \quad (5.18e)$$

$$\dot{\hat{y}}_6 = \left(-\frac{1}{2}\hat{y}_5^2 + \frac{1}{\hat{y}_3^2}\right)\beta_2(z) + \frac{5}{8}\sqrt{2}\hat{y}_1^2\gamma(z) + \gamma(z)\frac{4\sqrt{2}x_3x_1^2}{\sqrt{\pi}\hat{y}_3^3}\exp\left[-2\frac{(x_2 - \hat{y}_2)^2}{\hat{y}_3^2}\right] \times \Delta_2 \quad (5.18f)$$

avec

$$\Delta_0 = \int_0^{+\infty} \frac{u(-\hat{y}_3^2 + 4(x_3 \ln(u) + (x_2 - \hat{y}_2))^2) \exp\left(\frac{-2x_3^2}{\hat{y}_3^2} \ln(u)^2\right)}{(u^2 + 1)^2 u^{\frac{4x_3(x_2 - \hat{y}_2)}{\hat{y}_3^2}}} du \quad (5.19a)$$

$$\Delta_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u(x_3 \ln(u) + (x_2 - \hat{y}_2)) \exp\left(\frac{-2x_3^2}{\hat{y}_3^2} \ln(u)^2\right)}{(u^2 + 1)^2 u^{\frac{4x_3(x_2 - \hat{y}_2)}{\hat{y}_3^2}}} du \quad (5.19b)$$

$$\Delta_2 = \int_0^{+\infty} \frac{u(-3\hat{y}_3^2 + 4(x_3 \ln(u) + (x_2 - \hat{y}_2))^2) \exp\left(\frac{-2x_3^2}{\hat{y}_3^2} \ln(u)^2\right)}{(u^2 + 1)^2 u^{\frac{4x_3(x_2 - \hat{y}_2)}{\hat{y}_3^2}}} du. \quad (5.19c)$$

Pour obtenir les équations d'évolution des coordonnées collectives du rayonnement Stokes, il suffit de remplacer dans les équations (5.16) ou (5.18) les \hat{y}_j par \tilde{y}_j ($j = 1, 2, \dots, 6$).

Il ressort des équations (5.16) ou (5.18) que les coordonnées collectives du second ordre, à savoir, le chirp \hat{y}_4 , la fréquence \hat{y}_5 et la phase \hat{y}_6 , dépendent fortement de l'interaction entre le rayonnement et l'impulsion. En effet, on peut remarquer que les équations (5.16d), (5.16e) et (5.16f) font intervenir des termes proportionnels à $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / (x_3^2 + \hat{y}_3^2) \right]$, tandis que les équations (5.18d), (5.18e) et (5.18f) font intervenir des termes proportionnels à $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / \hat{y}_3^2 \right]$. Ces termes traduisent l'interaction entre le rayonnement anti-Stokes et l'impulsion. Notons que, lorsque l'écart temporel entre l'impulsion et le rayonnement est suffisamment petit $(x_2 - \hat{y}_2) \simeq 0$, le facteur $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / (x_3^2 + \hat{y}_3^2) \right]$ ou $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / \hat{y}_3^2 \right]$ est élevé, ce qui traduit une interaction forte entre l'impulsion et le rayonnement. Cette interaction se produit en début de propagation et correspond à la dynamique initiale au cours de laquelle l'impulsion se restructure. Par contre, lorsque l'écart temporel entre l'impulsion et le rayonnement devient suffisamment grand, l'interaction entre l'impulsion et le rayonnement devient négligeable $[\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / (x_3^2 + \hat{y}_3^2) \right] \simeq 0$ et $\exp \left[-2(x_2 - \hat{y}_2)^2 / \hat{y}_3^2 \right] \simeq 0]$. Le rayonnement, qui est alors suffisamment éloigné de l'impulsion, évolue comme une entité indépendante vis-à-vis de cette impulsion qui lui a donné naissance.

Pour obtenir les coordonnées collectives du rayonnement Stokes, il suffit de remplacer dans les équations (5.16) ou (5.18) les \hat{y}_j par \tilde{y}_j où $j = 1, 2, \dots, 6$.

5.3 Simulations numériques

Les simulations numériques sont basées sur la résolution numérique des équations d'évolution des paramètres de l'impulsion [Eqs. (5.16) ou (5.18)]. Mais cette opération comporte un énorme verrou, lié au fait qu'initialement, (à l'instant $t = 0$) le rayonnement n'existe pas. En d'autres termes, la résolution du système d'équation différentielles (5.16) requiert la définition d'un jeu de conditions initiales $\hat{y}_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) qui est indisponible. Pour résoudre cette difficulté, nous avons procédé de la manière suivante.

(i) Nous avons d'abord déterminé le profil de l'impulsion stationnaire, $A_s(0, t)$, par la méthode de Nihjof [27].

(ii) Ensuite nous avons déterminé les coordonnées initiales de l'impulsion comme étant celles de la Gaussienne la plus proche du point fixe $[x_i(0), i = 1, 2, \dots, 6]$.

(iii) Nous avons déduit le champ perturbateur initial par la relation

$$q(0, t) = f_g[x_1(0), x_2(0), \dots, x_6(0)] - A_s(0, t), \quad (5.20)$$

où f_g est la fonction Gaussienne définie dans la relation (5.6).

Dans le cas particulier du soliton idéal, qui a comme particularité de rayonner la totalité du champ perturbateur, les paramètres initiaux du rayonnement $\hat{y}_i(0)$ peuvent être obtenus directement à partir du champ $q(0, t)$, en déterminant par minimisation les paramètres de la Gaussienne la plus proche de $q(0, t)$. En dehors de ce cas particulier, il est important de noter que le champ perturbateur $q(0, t)$ est constitué d'une partie qui sera piégée au sein de l'impulsion et une partie $q_r(0, t)$ qui sera rayonnée. Comme le champ $q_r(0, t)$ nous est inconnu, la procédure la plus rigoureuse consiste à démarrer la simulation numérique par la résolution de l'ESNL (5.1), avec la condition initiale $\psi(0, t) = f_g[x_i(0); i = 1, 2, \dots, 6]$, et arrêter la résolution immédiatement après la phase initiale de restructuration (de l'impulsion) conduisant à la création des ondes de rayonnement. Rappelons que dans nos simulations numériques, le rayonnement correspond à l'énergie qui s'échappe de la fenêtre temporelle de circonscription de l'impulsion. La largeur de cette fenêtre est réglée de manière à ce qu'elle puisse contenir la quasi-totalité de l'énergie de l'impulsion. Ainsi donc, la procédure préalable de résolution numérique de l'ESNL s'exécute jusqu'à ce que nous détectons une fuite d'énergie de la fenêtre de circonscription de l'impulsion. Le champ situé en dehors de cette fenêtre est alors traité comme le champ initial $q_r(0, t)$, à partir duquel nous obtenons les coordonnées initiales du rayonnement par notre procédure de minimisation.

5.3.1 Cas des lignes à dispersion constante

Dans le chapitre 3, nous avons vu qu'une ligne à dispersion constante et amplification périodique admet un profil stationnaire (voir Figure 3.3) qui ne correspond à aucune fonction analytique connue à ce jour. Cependant nous avons montré que des profils d'impulsion de forme Sech ou Gaussienne, parfaitement ajustés au

profil stationnaire, peuvent exécuter une propagation de très haute stabilité. Mais cette propagation s'accompagne de l'émission d'un rayonnement. Dans ce qui suit, nous examinerons le comportement dynamique des paramètres des ondes de rayonnement émises par des impulsions ayant initialement un profil Gaussien. Nous utiliserons les mêmes paramètres de système que ceux considérés dans le chapitre 3 : $\alpha = 0.24 \text{ dB/km}$, $D = 1 \text{ ps/nm/km}$, $\gamma = 0.002 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

5.3.1.1 Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Sech

Nous avons exécuté la propagation d'une impulsion ayant à l'entrée du système le profil suivant :

$$f_s = x_{10} \text{sech} \left[\frac{(t - x_{20})}{x_{30}} \right] \exp \left[\frac{ix_{40}}{2} (t - x_{20})^2 + ix_{50} (t - x_{20}) + ix_{60} \right], \quad (5.21)$$

où les paramètres initiaux, $x_{10} = 0.06074 \text{ W}^{1/2}$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 22.5591 \text{ ps}$, $x_{40} = 15.75 \times 10^{-6} \text{ rad/ps}^2$, $x_{50} = 0$ et $x_{60} = 0.0054$, ont été ajustés de sorte que f_s soit le meilleur ajustement d'un profil stationnaire (non représenté ici). Les Figures 5.1 (a1), 5.1 (a2), 5.1 (a3), et 5.1 (a4) illustrent la dynamique lente des paramètres de l'impulsion. Rappelons que la dynamique lente est obtenue en enregistrant les paramètres de l'impulsion immédiatement après chaque amplificateur. Dans la Figure 5.1 les courbes en trait plein correspondent à la solution numérique du système d'équations variationnelles (5.11). Compte tenu de la nature approximative des équations variationnelles (où le champ résiduel est ignoré), il est imprudent d'exploiter systématiquement ces équations sans avoir préalablement vérifié sur un cas particulier que ces équations aboutissent à des résultats cohérents avec ceux obtenus par la procédure totalement numérique de résolution de l'ESNL et minimisation du champ résiduel (décrit dans le chapitre 2). Aussi, par souci de vérification de la qualité des résultats issus des équations variationnelles, dans toutes les figures de ce chapitre nous inclurons les résultats obtenus par minimisation du champ résiduel, et nous les représenterons par des courbes en tirets dans toutes les figures de ce chapitre. Les résultats de la Figure 5.1 montrent globalement une excellente stabilité de l'impulsion sur une distance de 9000 km . En dehors de la fréquence et la position de l'impulsion qui restent figées à $x_2(z) = 0$ et $x_5(z) = 0$, les autres paramètres oscillent lentement au voisinage de leurs valeurs initiales [comme l'illustrent les Figures 5.1 (a1), (a2) et (a3)]. Par ailleurs, on

constate un accord tout à fait satisfaisant entre les résultats des équations variationnelles (traits pleins) et ceux fournis par la minimisation directe du champ résiduel (tirets). D'autre part les Figures 5.1 (b1), (b2), (b3), (b4) et 5.1 (b5), révèlent deux phases dans l'évolution dynamique du rayonnement. La première phase, qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à $z = 4100km$, correspond à la phase de restructuration de l'impulsion qui aboutit à la création des deux ondes de rayonnement (Stokes et Anti-stokes). Nous avons trouvé que le champ associé à chacune des ondes de rayonnement commence à sortir de la fenêtre de circonscription de l'impulsion à partir de $z = 600km$, et cette sortie se poursuit jusqu'à $z = 4100km$, qui est la distance au bout de laquelle l'onde de rayonnement est complètement sortie de la fenêtre de circonscription de l'impulsion. Par conséquent, pour $z < 4100km$, le champ de rayonnement n'est pas encore totalement disponible. L'évolution des paramètres associés à la fraction disponible (en dehors de la fenêtre de circonscription) ne permet de tirer aucune conclusion pertinente sur le comportement dynamique du rayonnement. En revanche, au-delà de $z = 4100km$, l'onde de rayonnement est totalement créée. Elle possède sa propre identité et se propage de manière indépendante du reste de l'impulsion. Les termes d'interaction entre l'impulsion et le rayonnement, à savoir, les termes proportionnels à Δ_0, Δ_1 et Δ_2 ; dans les seconds membres des équations (5.18), deviennent négligeables. Le système d'équations variationnelles pour l'onde rayonnée devient alors analogue à celui de l'impulsion [Eqs. (5.11)]. Les caractéristiques marquantes de la dynamique du rayonnement sont les suivantes :

(i) Sa fréquence ($\tilde{y}_5/2\pi$) reste constante comme l'illustrent les courbes de la Figure 5.1 (b4), où l'on remarque qu'elle est décalée de $12GHz$ par rapport à la fréquence de la porteuse. Ce décalage en fréquence est converti en dérive temporelle via la dispersion comme l'illustrent la Figure 5.1 (b5) et l'équation (5.18b).

(ii) Contrairement à l'impulsion, l'onde de rayonnement ne garde pas un profil constant au cours de sa propagation. En effet, on peut voir dans les Figures 5.1 (b1) et 5.1 (b2) que son amplitude décroît de manière monotone, tandis que sa largeur temporelle s'accroît sans limite. L'étalement de l'onde de rayonnement est inévitable car son amplitude est beaucoup trop faible pour que le chirp induit par la non linéarité compense le chirp induit par la dispersion.

(iii) L'onde rayonnée est donc nécessairement chirpée, comme l'illustrent la Figure 5.1 (b3) et l'équation (5.18b).

Dès lors, on peut naturellement se demander si les caractéristiques qui viennent d'être mise en lumière pour des ondes rayonnées par une impulsion dotée initialement d'un profil Sech, s'étendent à tout type de profil initial d'impulsion. On peut obtenir quelques éléments de réponse à cette question en examinant le comportement rayonnant d'une impulsion dotée initialement d'un profil Gaussien.

5.3.1.2 Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Gaussien

Ici, nous avons réalisé la propagation d'une impulsion ayant à l'entrée du système le profil suivant

$$f_g = x_{10} \exp \left[\frac{-(t - x_{20})^2}{x_{30}^2} + \frac{ix_{40}}{2}(t - x_{20})^2 + ix_{50}(t - x_{20}) + ix_{60} \right], \quad (5.22)$$

où nous avons ajusté les paramètres initiaux ($x_{10} = 0.0575W^{1/2}$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 39.9842ps$, $x_{40} = 20.72 \times 10^{-6}rad/ps^2$, $x_{50} = 0$ et $x_{60} = 0.0048$) de telle sorte que f_g s'ajuste au mieux au même profil stationnaire que dans le cas de la Figure 5.1. La Figure 5.2 illustre le comportement dynamique de l'impulsion Gaussienne. En particulier on peut observer dans les Figures 5.2 (a1), (a2), (a3), (a4) et (a5) que l'impulsion Gaussienne affiche une haute stabilité de propagation, qui est tout à fait comparable à celle de l'impulsion Sech. D'autre part, ici aussi, l'onde de rayonnement est générée à une fréquence décalée d'environ 12GHz par rapport à la fréquence de la porteuse [comme l'illustre la Figure 5.2 (b4)], et elle sort totalement de la fenêtre de circonscription au bout d'une distance ($Z = 4000km$) qui est quasiment la même que dans le cas de l'impulsion Sech. Une autre caractéristique remarquable est l'étalement de l'onde de rayonnement au cours de la propagation.

Ainsi, il ressort des Figures 5.1 et 5.2 que les impulsions ayant initialement un profil Sech ou Gaussienne adoptent qualitativement le même comportement dans une ligne à dispersion constante et amplification périodique.

5.3.2 Cas des lignes à Gestion de dispersion

Nous avons vu dans les chapitres précédents que le profil d'une impulsion stationnaire dépend de la structure et des éléments constitutifs de la ligne de transmission. Dans les lignes à gestion de dispersion et amplification périodique, en général, l'impulsion stationnaire a un profil temporel doté de rugosités sur ses fronts avant et arrière. A cela s'ajoutent les bandes de Kelly, qui peuvent apparaître dans le profil spectral selon la taille du pas d'amplification. Globalement, la complexité du profil de l'impulsion stationnaire dans une ligne à gestion de dispersion est telle que ce profil n'est pas réalisable en pratique. Cependant, on peut approcher ce profil stationnaire par un profil Sech ou Gaussien.

5.3.2.1 Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Sech

Nous avons simulé la propagation d'une impulsion ayant à l'entrée un profil Sech (ajusté au mieux au profil stationnaire) dont les paramètres sont : $x_{10} = 0.1486W^{1/2}$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 0.563ps$, $x_{40} = 0.0745rad/ps^2$, $x_{50} = 0$ et $x_{60} = -0.0019$. Les paramètres de la maille élémentaire de la ligne sont les suivantes : $D_+ = 2ps/nm/km$, $D_- = 2ps/nm/km$, $\alpha_+ = \alpha_- = 0.22dB/km$, $\gamma_+ = \gamma_- = 2 \times 10^{-3}W^{-1}m^{-1}$, $L_+ = 439,0148m$, $L_- = 438,01782m$. Le comportement rayonnant de cette impulsion, illustré dans la Figure 5.3, est qualitativement similaire au comportement de la Sech dans la ligne à dispersion constante (Fig. 5.1). Quantitativement, on peut observer dans la Figure 5.3 (b4) que l'onde de rayonnement est entièrement créée au bout de $2000km$, avec une fréquence décalée de $470GHz$ par rapport à la porteuse, et poursuit sa propagation en s'étalant temporellement.

5.3.2.2 Propagation d'une impulsion ayant initialement un profil Gaussien

Nous avons trouvé qu'une impulsion dotée initialement d'un profil Gaussien ajusté au mieux au profil stationnaire, adopte un comportement rayonnant qualitativement analogue à celle de la Sech, comme l'illustrent les Figures 5.4, où l'on remarque quantitativement une légère différence par rapport à la fréquence de décalage de la Sech.

5.3.2.3 Propagation d'un soliton idéal

Dans le chapitre 3, nous avons introduit le concept de *soliton idéal*, qui fait référence à une impulsion capable de rayonner toute la perturbation qui la percute. Ce comportement est illustré dans les Figures 3.15 (a), 4.7 (c) et (d). Ici, nous avons repris les mêmes paramètres de simulation que dans la Figure 4.7 (c) et (d). Les résultats des simulations sont visibles dans les Figures 5.5.

Les coordonnées collectives de l'impulsion confirment une grande stabilité de l'impulsion au cours de sa propagation. D'autre part, le comportement dynamique des ondes de rayonnement, visible dans les Figures 5.5 (b1), (b2), (b3), (b4), et (b5), ne présente aucune différence qualitative significative par rapport à celui des autres ondes de rayonnement considérées dans ce chapitre.

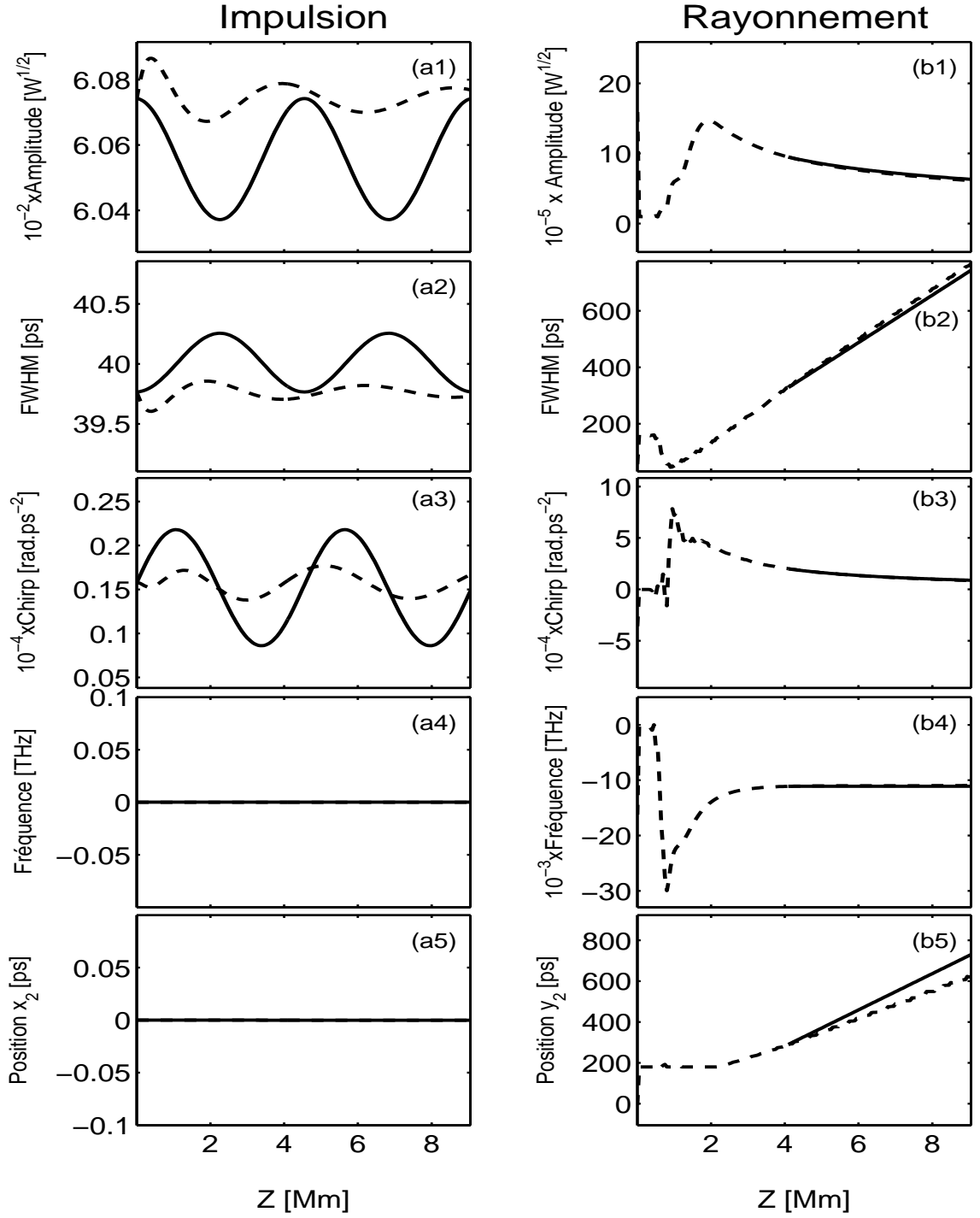


FIGURE 5.1 Dynamique des coordonnées collectives pour l'impulsion Sech et son rayonnement, dans la ligne à dispersion constante. Les courbes en trait plein représentent les résultats des équations variationnelles, tandis que les tirets représentent les résultats obtenus par la procédure numérique de minimisation du champ résiduel.

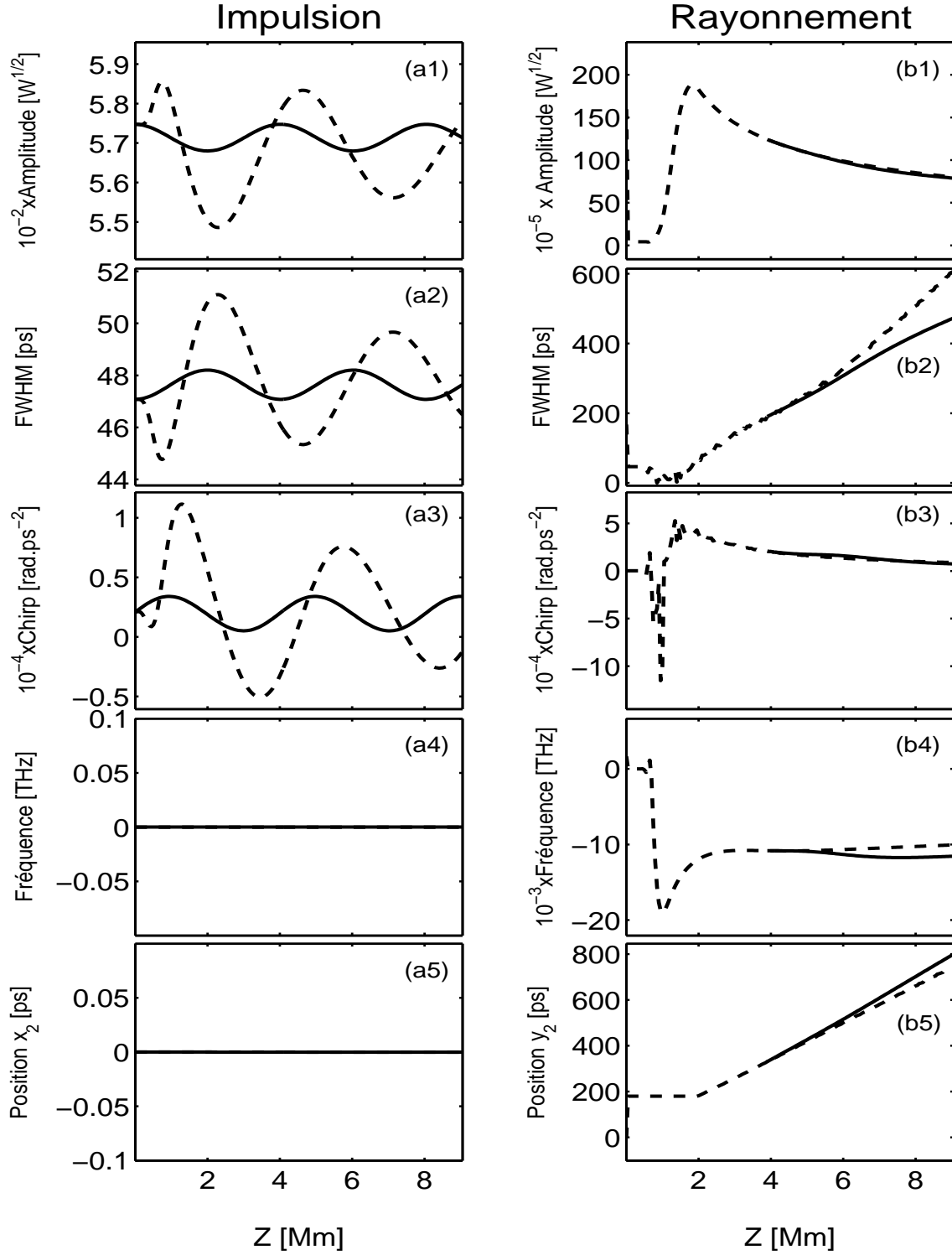


FIGURE 5.2 Dynamique des coordonnées collectives pour l'impulsion Gaussien et son rayonnement, dans une ligne à dispersion constante.

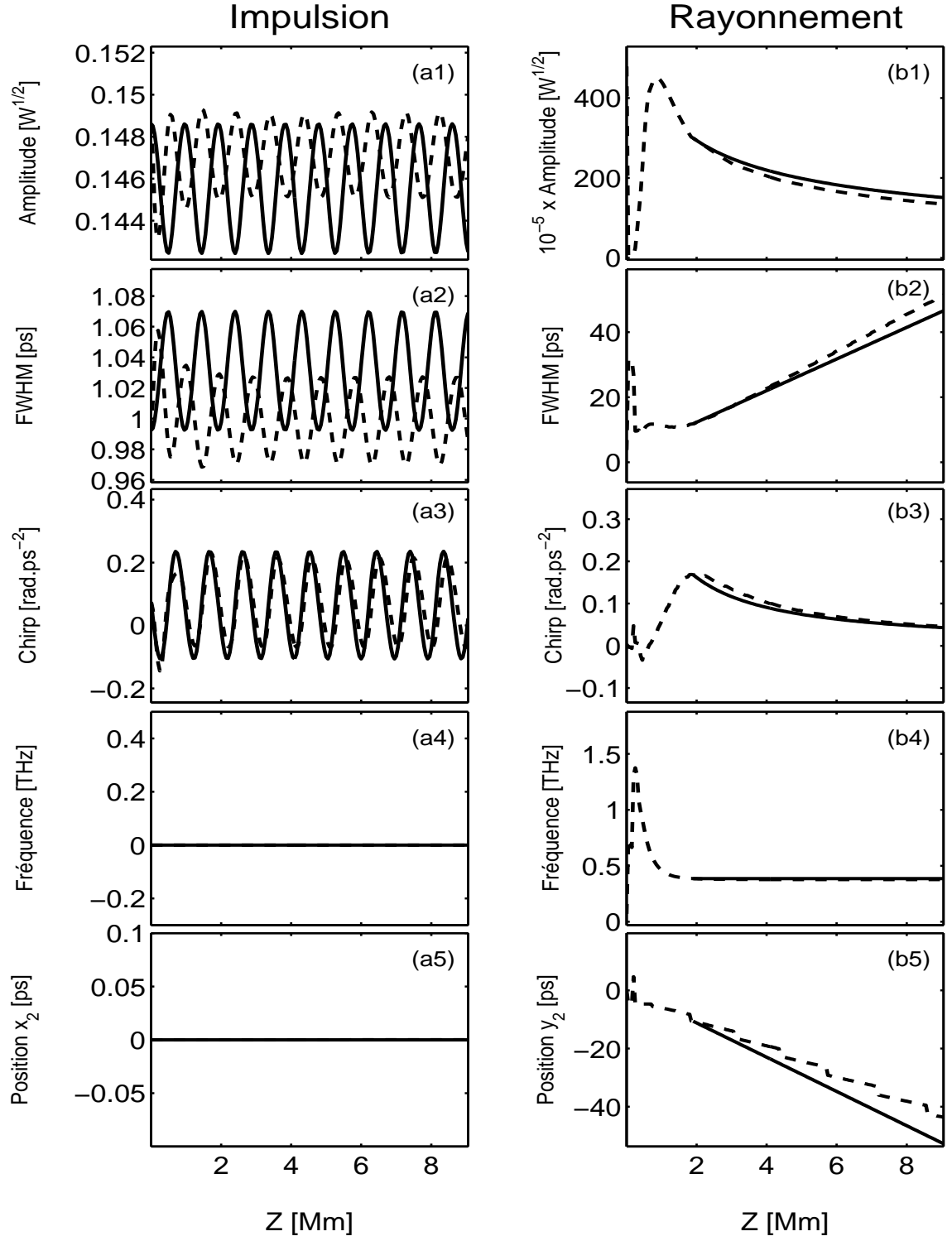


FIGURE 5.3 Dynamique des coordonnées collectives pour l'impulsion Sech et son rayonnement dans une ligne à gestion de dispersion.

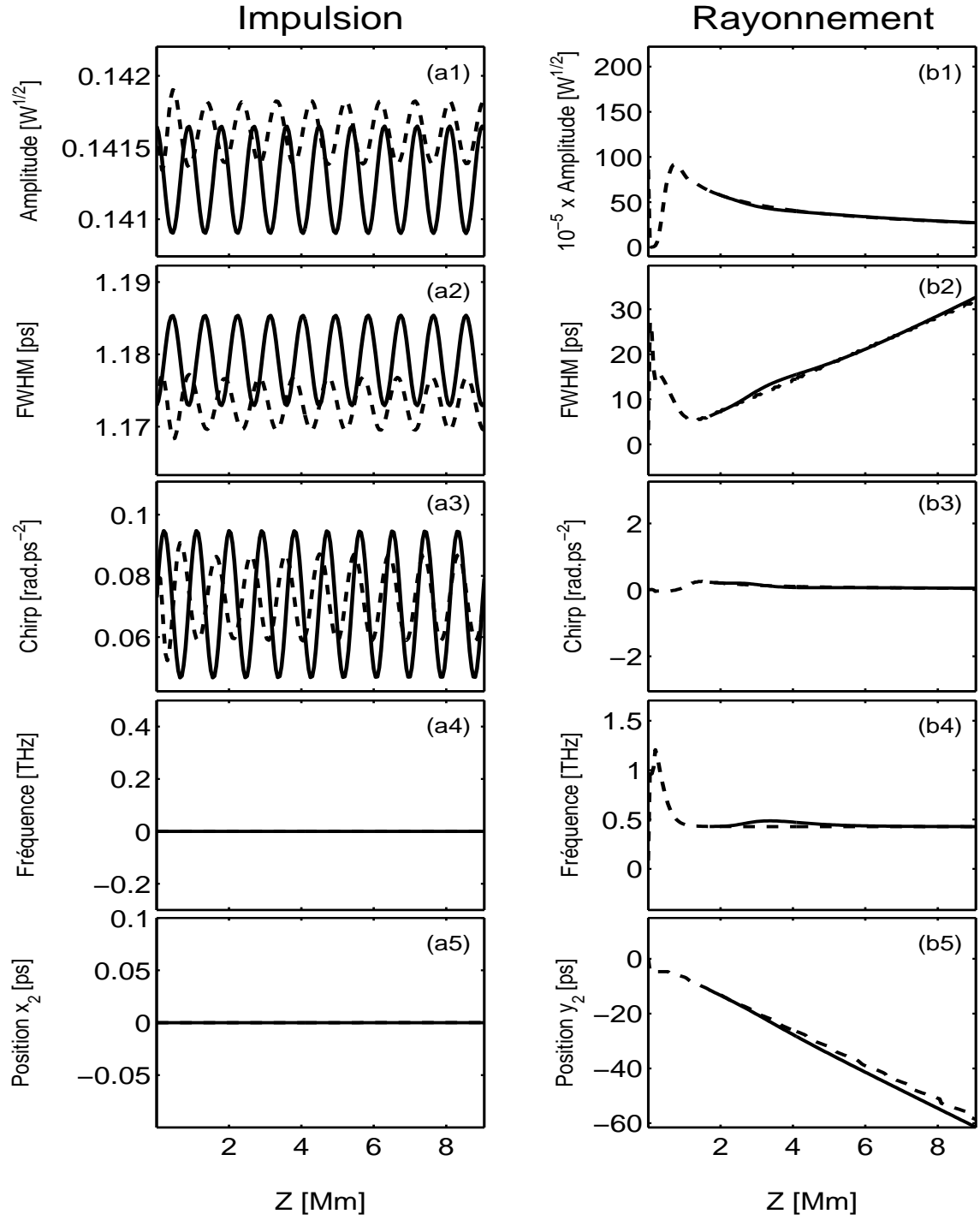


FIGURE 5.4 Dynamique des coordonnées collectives pour l'impulsion Gaussienne et son rayonnement, dans une ligne à gestion de dispersion.

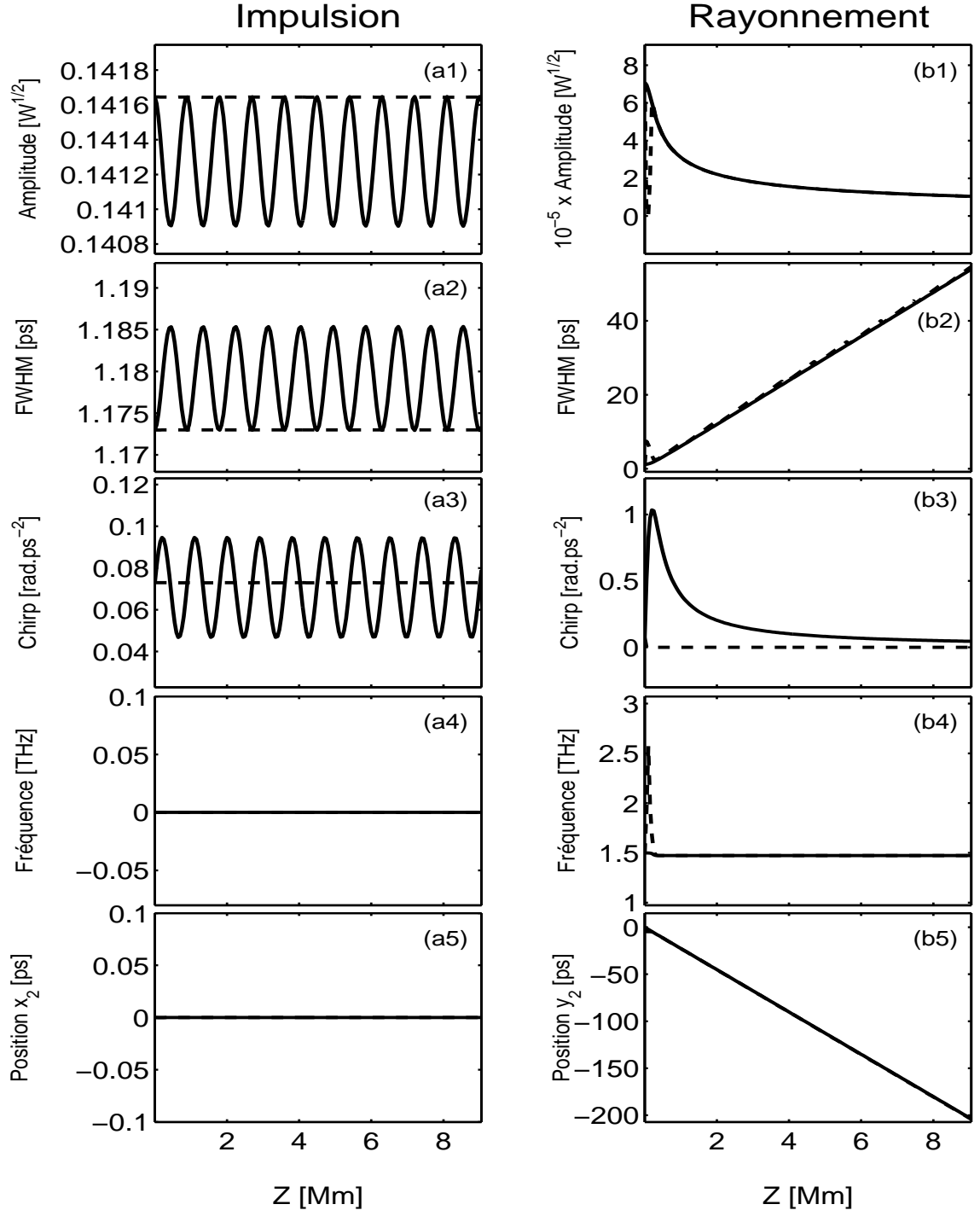


FIGURE 5.5 Dynamique des coordonnées collectives pour l'impulsion idéale et son rayonnement, dans une ligne à gestion de dispersion.

5.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objet d'examiner la faisabilité d'une analyse du comportement rayonnant d'une impulsion lumineuse par la méthode des équations variationnelles. Le principal obstacle à l'utilisation de cette méthode est la non disponibilité des coordonnées collectives initiales du rayonnement, qui n'existe pas au moment où l'impulsion commence sa propagation. Pour mener à bien cette étude, nous avons successivement utilisé comme guide d'onde, une ligne à dispersion constante et une ligne à gestion de dispersion.

Il ressort de notre étude qu'en dehors du cas du soliton idéal, l'application des équations variationnelles nécessite préalablement le recours à une méthode numérique afin de résoudre l'ESNL dès l'entrée de la ligne jusqu'à la création des ondes de rayonnement. Nous avons trouvé qu'une fois qu'elles sont créées, le comportement dynamique des ondes de rayonnement est joliment bien décrit par les équations variationnelles, qui s'accordent alors extrêmement bien avec les coordonnées collectives obtenues par la procédure numérique de minimisation du champ résiduel.

Au plan qualitatif, cette étude a permis de mettre en lumière plusieurs propriétés remarquables des ondes de rayonnement.

(i) Les ondes rayonnées ne gardent pas un profil constant au cours de la propagation. Elles s'étalent continuellement, en raison d'un chirp induit principalement par la dispersion et qui ne peut être compensé par le chirp induit par la non linéarité.

(ii) Leur fréquence reste constante au cours de la propagation et se situe par rapport à la porteuse à un écart compris entre le GHz et le THz . Conséquemment, pour un écart important, on peut envisager de supprimer le rayonnement par filtrage spectral. Pour un écart faible une telle opération n'est pas envisageable car elle comporte un risque élevé d'altérer la stabilité de propagation de l'impulsion. Dans ce cas, on doit envisager une suppression par filtrage temporel.

(iii) Le décalage de fréquence entre la porteuse et le rayonnement est converti en dérive temporelle. Nos simulations montrent que cette dérive temporelle évolue de manière quasiment linéaire avec la distance de propagation [comme l'illustrent les Figures 5.1 (b5), 5.2 (b5), 5.3 (b5), 5.4 (b5), et 5.5 (b5)]. On peut approcher la

position temporelle de l'onde rayonnée par une expression du type

$$\tilde{y}_2 \simeq \tilde{y}_{20} + \langle \beta \rangle \tilde{y}_{50}(z - z_r) \quad (5.23)$$

où $\langle \beta \rangle$ est la dispersion moyenne du système, \tilde{y}_{50} le décalage en fréquence entre la porteuse et le rayonnement, \tilde{y}_{20} est une constante qui dépend des paramètres du système, z_r est la distance nécessaire à l'impulsion pour créer le rayonnement et l'expulser du temps bit. Ainsi donc, l'approche des coordonnées collectives permet de prédire de manière relativement précise la position temporelle des ondes rayonnées, pour une distance de propagation z . Il est donc conceptuellement envisageable de mettre en place une stratégie de suppression des ondes rayonnées, qui ne soit pas basée sur des opérations systématiques et très onéreuses de filtrage (temporel ou spectral) après chaque pas d'amplification, mais sur une seule opération de filtrage. En effet nous avons trouvé dans nos simulations que la distance z_r se situe entre le millier de km et plusieurs milliers de km . C'est donc à cette distance z_r que nous proposerions de mettre en place (si besoin) une opération spécifique de suppression des ondes de rayonnement.

Conclusion et perspectives

Le domaine des Télécoms, même dans le contexte de crise économique que nous traversons actuellement, figure encore parmi les secteurs d'activité les plus dynamiques. Le déploiement des réseaux de fibres optiques à travers le monde (qu'il s'agisse des réseaux d'accès ou à longue distance) se poursuit à un rythme relativement élevé, soutenu par la demande des usagers (liée surtout à la croissance exponentielle du trafic Internet) et par des organisations internationales à but non lucratif (telles que le *FTTH Council Europe*, (<http://www.ftthcouncil.eu/>) qui œuvrent pour la promotion et l'accès d'un plus grand nombre d'utilisateurs à des liaisons haut débit. Le sigle FTTH signifie «Fiber To The Home» (qui signifie littéralement en français : «fibre optique jusqu'au domicile»). Ce développement profite principalement aux deux grands domaines, que sont les micro-ondes et l'optique. La technologie micro-onde est surtout présente dans les liaisons à courte distance, les liaisons urbaines ou périurbaines, et certaines liaisons à grande distance (téléphonie mobile, satellites, GPS, etc.). L'optique est très largement dominante dans les liaisons à grande distance, notamment celles reliant les différentes villes d'un pays et les pays entre eux, par des câbles de fibres optiques. Ces deux technologies poursuivent leur développement en complémentarité. Le déploiement des réseaux de communication par fibres optiques se poursuit actuellement dans deux principales directions : Les *liaisons courtes distances*, que l'on qualifie de réseaux d'accès FTTH, ou FTTB (Fiber To The Building), et les *liaisons à grandes distances*, qualifiée de réseaux *backbone*. C'est dans ce cadre que se développent actuellement des recherches à caractère à la fois fondamental et appliqué, dans les laboratoires industriels et universitaires, pour proposer des solutions

permettant de dépasser les limites technologiques actuelles, et améliorer les performances de ces lignes de communications optiques, notamment celles répondant à la double contrainte d'acheminer de très hauts débits sur de très grandes distances. Le progrès vers ces objectifs passe nécessairement par une compréhension très fine des mécanismes fondamentaux qui gouvernent le comportement impulsif dans les systèmes de transmission.

Ce travail de thèse, qui s'inscrit dans ce contexte général, avait pour objet d'étudier le comportement dynamique d'une impulsion lumineuse de type soliton, affectée à l'entrée de la ligne d'une perturbation de profil. Au prix d'une analyse méticuleuse combinant l'équation de Schrödinger non linéaire (qui décrit la propagation du champ impulsif) à la méthode des opérateurs de projection réduits (que nous avons élaborée au cours de cette thèse afin d'obtenir l'évolution des paramètres physiques de l'impulsion et son rayonnement), nous avons dressé la cartographie générale des différents types de comportement qu'une impulsion légèrement perturbée peut adopter au voisinage de son état stationnaire. La perturbation du système survient du fait de l'injection dans le guide d'onde d'une impulsion affectée d'un désaccord de profil par rapport au profil stationnaire. Nous avons montré que lorsque ce désaccord de profil est suffisamment petit, l'impulsion injectée est ressentie par le système comme une impulsion stationnaire légèrement perturbée. Le champ perturbateur correspond alors à l'écart de profil entre l'impulsion injectée et l'impulsion stationnaire. L'analyse théorique que nous avons développée est basée sur l'hypothèse d'un processus d'interférence entre le champ stationnaire et le champ perturbateur. Ce processus met en jeu une énergie que nous avons baptisée *énergie du champ d'interférence* (ECI) et que nous avons identifié comme étant l'un des paramètres majeurs qui déterminent le caractère plus ou moins rayonnant de l'impulsion. L'ECI est en réalité une pseudo-énergie, qui peut prendre des valeurs positives, négatives, ou nulle, selon la structure du champ de l'impulsion injectée dans le système. Le premier résultat majeur de ce travail de thèse est la mise en place d'une classification énergétique des comportements dynamiques, basée fondamentalement sur l'ECI. Cette classification révèle trois grandes classes d'impulsions :

- (i) Lorsque l'ECI est positive, l'impulsion injectée dans le système se présente

avec une énergie légèrement supérieure à l'énergie de l'impulsion stationnaire, mais se propage de manière hautement stable avec cet excédent d'énergie. Ce type d'impulsion constitue la classe des «solitons chauds».

(ii) Lorsque l'ECI est négative, l'impulsion se présente avec une énergie légèrement inférieure à l'énergie de l'impulsion stationnaire, mais se propage de manière hautement stable avec ce déficit d'énergie. Nous avons rangé ce type d'impulsion dans la classe des «solitons froids».

(iii) Lorsque l'ECI est nulle, l'impulsion injectée dans le système se présente alors avec une énergie identique à celle de l'état stationnaire. Lorsque cette impulsion est capable de se propager de manière hautement stable en conservant son énergie, nous la rangeons dans la classe des «solitons isothermiques».

Par ailleurs, nous avons découvert que chacune des trois grandes classes suscitées se subdivise en deux sous-classes qui diffèrent par l'aptitude de l'impulsion à générer un rayonnement :

- La première sous-classe est celle des impulsions non rayonnantes. L'existence de cette sous-classe contredit une idée très largement répandue bien au-delà du domaine de l'optique, selon laquelle une impulsion perturbée émet systématiquement un rayonnement. Elle révèle que toutes les impulsions lumineuses ne sont pas en mesure de se restructurer jusqu'à la formation de bandes latérales de rayonnement. Ainsi nous avons pu démontrer l'existence de solitons chauds non rayonnants, ainsi que des solitons froids non rayonnants. Ici tout se passe comme si l'impulsion stationnaire absorbe et piège toute la perturbation en son sein durant la propagation.

- La deuxième sous-classe est celle des impulsions rayonnantes. Elle correspond aux profils d'impulsions qui peuvent se restructurer jusqu'à la formation des bandes latérales de rayonnement. On retrouve dans cette sous-classe : des solitons chauds, des solitons froids et des solitons isothermes. Un cas très intéressant de soliton isotherme rayonnant est le cas où l'impulsion rayonne la totalité du champ perturbateur et se retrouve dans l'état stationnaire. Il s'agit du soliton idéal. Dans tous les autres cas, tout se passe comme si l'impulsion stationnaire absorbe une partie du champ perturbateur et expulse l'autre partie via le processus de rayonnement.

- Nous avons aussi identifié à la frontière de certaines classes, des «comportements

hybrides» où l'impulsion change de classe en cours de propagation. Par exemple, l'impulsion commence sa propagation en état d'hyperthermie (soliton chaud), avant de basculer vers un état d'hypothermie (soliton froid) suite à une perte conséquente d'énergie via le rayonnement.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous avons abordé le délicat problème du traitement théorique de la dynamique des ondes de rayonnement par l'approche des coordonnées collectives basée sur les équations variationnelles. Nous avons conclu à l'impossibilité d'utiliser cette approche toute seule pour traiter la dynamique du rayonnement. En revanche, nous avons montré qu'en combinant les équations variationnelles et l'équation de Schrödinger non linéaire, il devient possible de décrire le comportement dynamique des ondes de rayonnement par une approche de coordonnées collectives. Cette approche nous a permis d'accéder à une connaissance très fine de l'évolution des paramètres fondamentaux de l'onde de rayonnement (amplitude, position temporelle, largeur, fréquence, phase), et de formuler en suite une stratégie de suppression des ondes de rayonnement dans les systèmes de transmission. D'un point de vue fondamental, nous avons établi que, contrairement à bon nombre de systèmes physiques où le rayonnement s'effectue de manière continue, l'impulsion optique émet plutôt une bouffée de rayonnement. Une fois émise, cette bouffée de rayonnement s'éloigne continuellement de l'impulsion en s'étalant. Finalement, l'ensemble de ce projet de thèse démontre que dans les guides d'ondes à fibre optique, il existe une diversité insoupçonnée de comportements dynamiques au voisinage des états stationnaires de propagation.

Cette thèse apporte un éclairage nouveau sur l'un des concepts les plus fascinants et pluridisciplinaires de la physique moderne ; le concept de soliton. Au plan fondamental, la question qui vient naturellement à l'esprit est la suivante : la cartographie des comportements dynamiques que nous avons dressée dans cette thèse, a-t-elle un caractère suffisamment général pour pouvoir être étendue aux autres solitons des différentes branches de la physique ? Nous avons commencé l'examen de cette vaste question, en nous penchant sur le comportement du soliton bien connu de Sine-Gordon, qui a comme support physique de propagation une chaîne d'atomes plongés dans un potentiel de substrat sinusoïdal et couplé harmoniquement par des

ressort identiques.

Au plan pratique, en dépit de la haute valeur prédictive des résultats généralement fournis par les équations de Schrödinger Non Linéaire, la démonstration expérimentale des comportements découverts dans ce travail de thèse demeure nécessaire et s'inscrit dans une perspective à plus long terme.

Compléments sur les impulsions lumineuses rayonnantes et non rayonnantes dans les guides d'onde à fibre optique

A.1 Soliton hyperthermique rayonnant généré par une perturbation modulée en phase

Le soliton hyperthermique rayonnant peut être aussi obtenu lorsque le champ perturbateur est modulé en phase avec

$$\phi_0 = \gamma P_p L_{CNL}, \quad (\text{A.1})$$

où P_p est la puissance initiale de la perturbation non chirpée. Le paramètre L_{CNL} permet de doter le champ perturbateur d'un chirp non linéaire. Dans ce cas, nous obtenons qualitativement le même résultat que dans le cas d'une perturbation modulée en amplitude, à savoir, le rayonnement d'une partie de la perturbation et le piégeage de l'autre partie. Les Figures (A.1) illustrent principalement le phénomène de rayonnement. En effet, l'importance du champ piégé dans le cas de la Figure A.1 (a) et (b) est telle qu'elle masque le phénomène de rayonnement. Pour rendre le rayonnement visible dans cette figure, nous avons dû supprimer le champ piégé dans les Figures A.1 (a) et (b). Nous avons également représenté les courbes des énergies rayonnée (E_R/E_{q_0}) et piégée (E_P/E_{q_0}) pour mieux illustrer ce phénomène [Figure (A.1 (c) et

(d)].

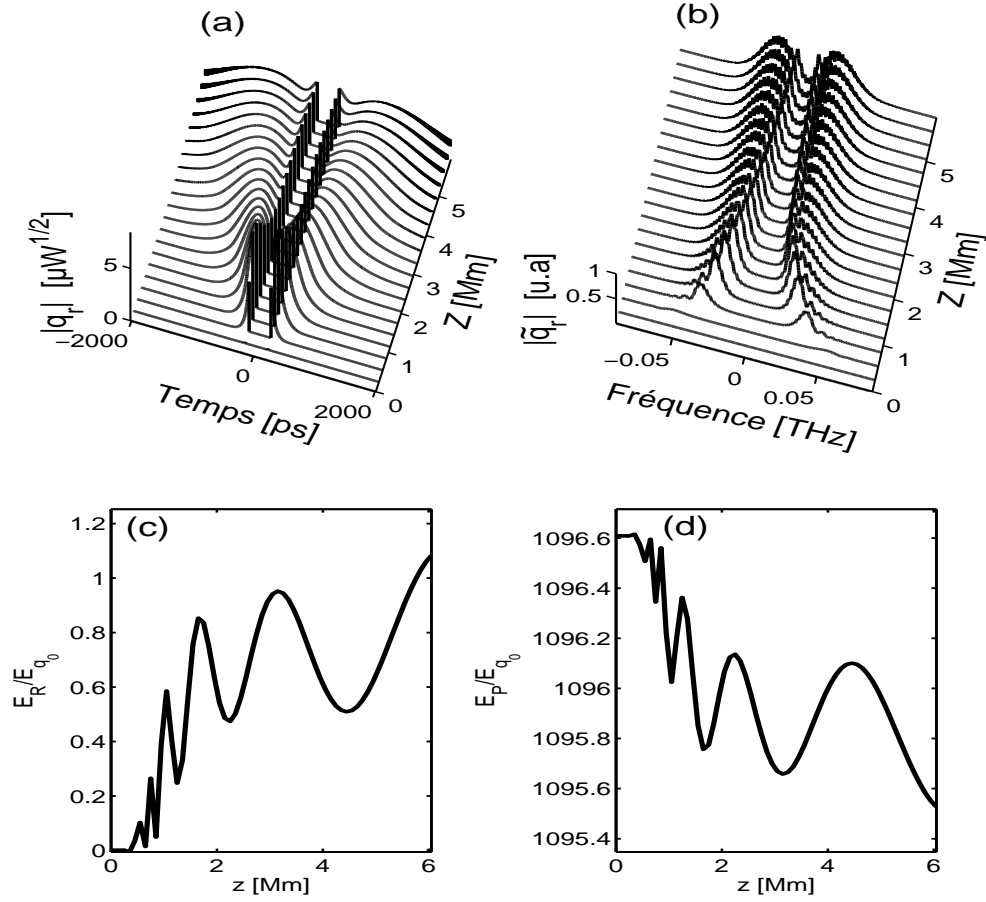


FIGURE A.1 Evolution du champ perturbateur modulé en phase et des énergies dans le cas du soliton hyperthermique rayonnant pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\eta = 0$, $\delta = 1$, $L_{CNL} = 3.5 \times 10^{12}$.

A.2 Soliton hypothermique rayonnant pour une perturbation modulée en phase

les Figures (A.2) illustrent le comportement rayonnant d'un soliton froid percuté à l'entrée de la fibre par une perturbation modulée en phase. Le comportement est qualitativement le même que celui d'un soliton froid percuté par une perturbation modulée en amplitude. On peut cependant noter que, dans le cas de la perturbation modulée en phase, le phénomène de restructuration initiale de la phase de la perturbation est clairement visible et l'énergie rayonnée moins importante que dans le cas

de la modulation en amplitude.

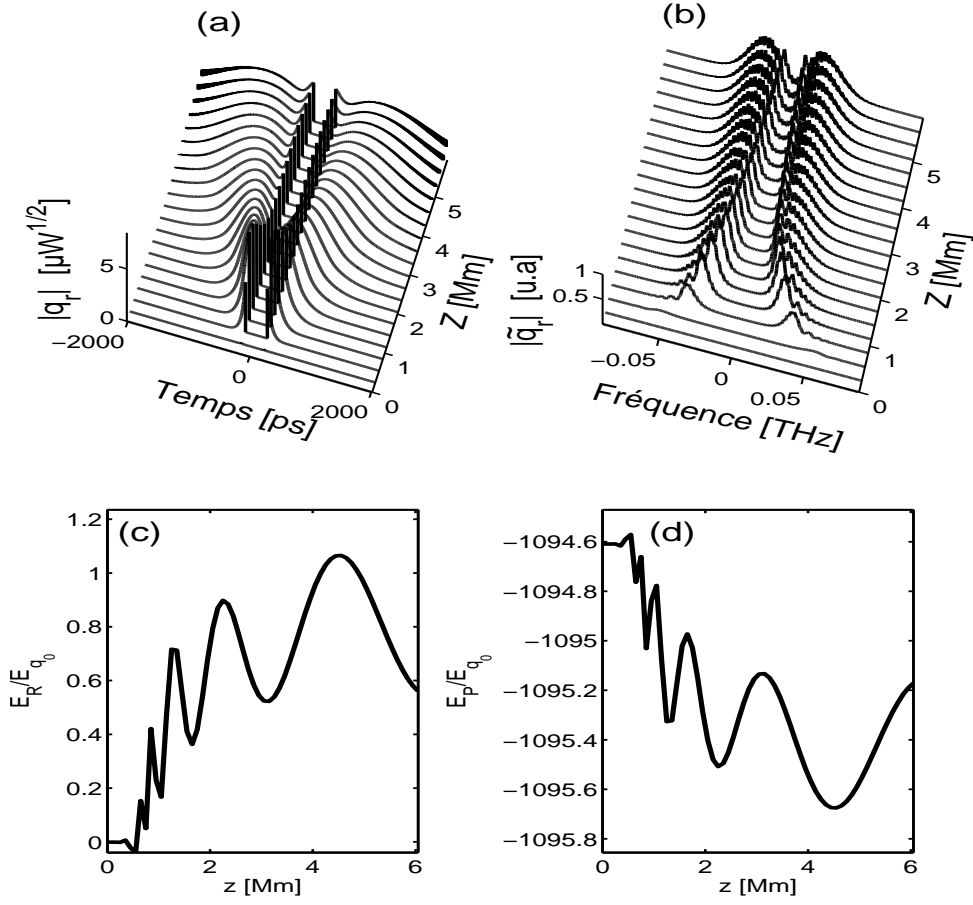


FIGURE A.2 Evolution du champ perturbateur modulé en phase et des énergies dans le cas du soliton hypothermique rayonnant pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\eta = 0$, $\delta = -1$, $L_{CNL} = 3.5 \times 10^{12}$.

Liste des publications

Articles relatifs à la thèse

1. E. Tchomgo Felenou, P. Tchofo Dinda, C.M. Ngabireng, K. Nakkeeran. *Collective coordinate theory for light pulses in fibers : The reduced projection operators* Phys. Lett. A, 377, 770-777, 2013.
2. E. Tchomgo Felenou, P. Tchofo Dinda and C.M. Ngabireng. *Unified mapping of the dynamics of solitons in fiber-optic waveguides*, en préparation.
3. P. Tchofo Dinda, E. Tchomgo Felenou and C.M. Ngabireng. *Hot Solitons, cold solitons, and ideal soliton, in glass-fiber waveguides and atomic systems*, en préparation.



Collective coordinate theory for light pulses in fibers: The reduced projection operators



E. Tchomgo Felenou^a, P. Tchofo Dinda^a, C.M. Ngabireng^{a,1}, K. Nakkeeran^{b,*}

^a Laboratoire Interdisciplinaire Camot de Bourgogne, UMR CNRS No. 6303, 9 Av. A. Savary, B.P. 47 870, 21078 Dijon Cédex, France

^b School of Engineering, Fraser Noble Building, King's College, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, UK

ARTICLE INFO

Article history:

Received 26 June 2012

Received in revised form 26 November 2012

Accepted 17 January 2013

Available online 21 January 2013

Communicated by A.P. Fordy

ABSTRACT

We consider optical waveguides in which light pulses may execute complex dynamical behaviors including translational motions accompanied with strong internal vibrations. Such systems necessarily generate various types of collective motion, in which each collective mode is describable by a collective coordinate. We present a novel projection operator formalism for deriving the equations of motion of the collective coordinates and coupled fields. This formalism is built up by treating separately the dynamics of the pulse phase and that of its amplitude, that is, by using two distinct projection operators (one for the amplitude, and the other one for the phase). This new pair of operators, which we call *reduced projection operators*, has as main virtue of having dimension reduced by half as compared to that of the conventional operators that includes both pulse amplitude and phase together. The main interest of the reduced projection operators lies in the ease with which the equations of motion are derived when compared with the amount of algebra needed to obtain the same equations from the conventional projection operators. We provide examples of concrete situations that illustrate the effectiveness of the collective-coordinate approach based on the reduced projection operators.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Light pulses propagation in dielectric waveguides, such as optical fibers, is well known to generate a host of linear and non-linear phenomena [1]. The combined effects of these phenomena lead to complex dynamical processes, which are often difficult to understand by a direct analysis of the temporal profile of the electric field of the pulse. To facilitate the understanding of these dynamical processes, very often, efforts are made to bring back the dynamics of the pulse (which in principle implies a very large number of degrees of freedom) to that of a mechanical system which is much simpler, endowed with only a few degrees of freedom [2]. One associates then with every degree of freedom of the equivalent mechanical system, a parameter called collective coordinate (CC), which is chosen to represent in a reliable way a major parameter of the pulse (temporal position in the rest frame, width, amplitude, chirp, etc.). The success of this approach, which is called “collective-coordinates approach”, is subordinated to the possibility of transforming the non-linear Schrödinger equation (which governs the spatio-temporal evolution of the pulse

field) into a system of ordinary differential equations (ODEs) governing the evolution of the pulse parameters during propagation in the fiber. CC approaches are particularly useful in situations where no exact analytical solution of the equation for propagation is available. Several types of light pulses, which are broadly referred to as being ‘solitons’ pulses, have proved to be highly stable in fibers. Strictly speaking, a conventional soliton corresponds to a perfect pulse propagating without profile deformation in an ideal fiber without losses [3,4]. Dispersion-managed solitons execute large deformations of profile and phase, in a periodic fashion, when they propagate in optical fiber transmission lines made of a concatenation of sections of fiber of alternately positive and negative dispersion [2,5–9]. This internal dynamics of the dispersion-managed soliton significantly increases the level of complexity of the theoretical treatment. A similar situation of pulse propagation accompanied by strong internal dynamics is widely present in fiber lasers, where it is induced by processes of cavity losses, amplification, and an eventual dispersion management within the laser cavity [10–14]. For this type of practical physical systems, where the pulse executes a strong internal dynamics, there exists in the literature no exact analytical expression that describes perfectly the spatio-temporal evolution of the pulse profile. Several previous work revealed conditions of propagation (within transmission lines and mode-locked fiber lasers) where the slow dynamics of the pulse corresponds to a temporal profile close to a hyperbolic

* Corresponding author.

E-mail address: k.nakkeeran@abdn.ac.uk (K. Nakkeeran).

¹ Permanent address: ENSP, University of Yaounde I, Cameroon.

secant shape [11,12,15]. For those systems subject to a strong internal dynamics, optimization and system design techniques are fundamentally based on numerical procedures, which are needed to solve the equations modeling the pulse propagation in the system. As these numerical procedures provide only very few details on the internal dynamics of the pulse, they are sometimes supplemented by analytical and semi-analytical approaches which correspond precisely to CC approaches [2,7,16–26]. Then the CC approaches allow us to obtain the evolution of the pulse parameters during propagation. The CC approaches the most commonly used during the recent years include, the moment method [23–25], the averaged-Lagrangian method [26], and the projection-operator method [2,18,19]. All these methods are fundamentally based on a process of minimization of the difference between a certain reference function (called *ansatz* function) and the exact solution of the propagation equation.

One of the most popular CC approaches is the projection-operator (PO) approach, which has been developed by Boesch et al., in condensed matter physics [27], before being applied to the study of the dynamic of light pulses in optical fibers [2,18,19]. In the PO approach, the CCs are introduced into the theoretical treatment through a test function, called *ansatz* function, which is chosen to represent at best the exact profile of the pulse. The difference between the exact profile (exact solution of the propagation equation of the pulse field) and the *ansatz* function is called *residual field*. The main idea in the PO approach is to impose constraints on the CCs so as to minimize the residual-field energy during the propagation [2,27]. This approach is equivalent to the application of a PO directly on the non-linear Schrödinger equation. Mathematically, the PO is a vector whose elements are the eigenfunctions of the vibrational modes associated with the CCs. The process of application of the PO leads, after important algebraic manipulations, to matrix equations that must be solved to obtain analytical expressions of the rates of variation of the CCs. The resolution of these matrix equations is therefore a decisive step, which becomes insuperable when the number of CCs is too high. A typical example of situation where a rigorous usage of the CC approaches (including the PO method) is virtually impossible because of a too high number of CCs, is the process of interaction between several light pulses. In practice, to treat problems of interaction of light pulses, it is usual to reduce considerably the number of CCs by restricting the problem to ideal cases where the interacting pulses differ only with respect to a few major parameters (such as the position, and frequency) while all other parameters (chirp, width, amplitude, etc.) are supposed strictly identical for all pulses [2]. In this context, it becomes clear that an improvement of CC methods is necessary to overcome the complexity of algebraic operations which severely limits the understanding of certain types of dynamical behaviors of light pulses in non-linear dielectric waveguides.

In this Letter, we propose a substantial modification in the PO method presented in Ref. [2], to drastically reduce the complexity of algebraic operations required to obtain the equations of motion of the CCs. In Ref. [2], the PO is built by means of an *ansatz* function that includes both the amplitude and the phase of the pulse. We show in the present work that a substantial improvement of the efficiency of the projection operation is obtained by treating separately the dynamics of the phase and that of the amplitude, that is, by using two distinct PO (one for the amplitude, and the other one for the phase). This new pair of operators, which we call *reduced projection operators* (RPO), has as main virtue of having a dimension reduced by half as compared to that of the unique operator that includes both pulse amplitude and phase together. This Letter is organized as follows. Section 2 presents the CC approach based on the conventional projection operator (CPO). Section 3 presents the CC approach based on the RPO. In Section 4 we il-

lustrate some practical applications of the RPO, with an emphasis on the problem of spontaneous emission of radiation by a light pulse. In Section 5 we conclude this work.

2. Theoretical model and conventional projection operators

One can describe in a realistic way the propagation of light pulses in optical fiber systems by the generalized non-linear Schrödinger equation (GNLSE) which follows:

$$\begin{aligned} V(\psi) &\equiv \psi_z \\ &= -i \frac{\beta_2(z)}{2} \psi_{tt} + i \gamma |\psi|^2 \psi \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \psi + (\sqrt{G} - 1) \times \sum_{n=1}^N \delta(z - nZ_A) \psi \end{aligned} \quad (1)$$

where ψ refers to the electric field of the pulse (or the pulse train), β_2 , γ and α designate the dispersion, non-linearity, and linear-attenuation coefficients, respectively. Eq. (1) may describe pulse propagation within a fiber line with constant dispersion, as well as within a line made of a concatenation of sections of fibers with alternately positive and negative dispersion coefficients. The line may be equipped with lumped amplifiers at distances regularly spaced by Z_A , so as to compensate the linear losses. In Eq. (1) the parameter $G = \exp(\alpha Z_A)$ refers to the gain of each amplifier.

To clearly highlight the general principles of the CC approach based on the CPO introduced in Ref. [2], we have chosen to examine the pulse propagation in the system described by Eq. (1), by focusing on the domain located between two consecutive amplifiers. Consequently, hereafter, for sake of simplicity we will no longer exhibit explicitly the last term of the right-hand side of Eq. (1), because this term acts only in a punctual way at amplification sites.

The general idea in CC approaches is to associate new variables (the CCs) to physical quantities to which we are interested, and to obtain their equations of motion. The first step in a CC approach that utilizes a PO, is to decompose the pulse field ψ in the following way:

$$\psi(z, t) = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, t) + q(z, t), \quad (2)$$

where the *ansatz* function f is chosen to be the best representation of the temporal profile of the pulse, and q is the residual field such as the sum of f and q is the exact solution of the propagation equation (1). It is worth noting that the most commonly utilized *ansatz* functions to represent light pulses in optical fibers, are Gaussian or hyperbolic-secant shape profiles [2,7,17–19]. But any other type of profile may be used provided that the corresponding residual field has a sufficiently small magnitude compared to the *ansatz* function.

It is important to realize that the simple fact of decomposing the field ψ as indicated in Eq. (2) has its own consequence. The consequence of replacing the original system (described by ψ) by an equivalent system (described by q , and the N CCs) produces a phase space which is wider than that of the original system. In other words, a simple substitution of $\psi = f + q$ in Eq. (2) has a consequence of introducing unwanted solutions into the equivalent system. It is thus necessary to apply constraints into the equivalent system so as to eliminate the unwanted solutions, and bring back the phase space of the equivalent system to the same dimension as that of the original system [27]. The major constraint imposed in the equivalent system is that the CCs must evolve only in the particular direction that minimizes the energy of the residual field defined by [2]:

$$\Lambda \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi - f(X_1, X_2, \dots, X_N, t)|^2 dt. \quad (3)$$

Eqs. (2) and (3) lead to the following constraint conditions:

$$C_j(X_1, X_2, \dots, X_N) \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial X_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \Re[q \wp_j] dt \simeq 0, \quad (4)$$

where

$$\wp_j \equiv \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \quad (5)$$

corresponds to the CPO defined in Ref. [2]. The procedure of obtaining the equations of motion of the CCs contains several steps:

1. The first one consists in substituting the expression (2) in the GNLSE (1). One then obtains an equation of motion in which the residual field is strongly coupled with the CCs in the following way:

$$q_z + \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = V(f + q). \quad (6)$$

2. In the second step we apply the CPO (5) to Eq. (6). It consists in multiplying (6) by the CPO \wp_j ($j = 1, N$). Then, by performing the time integration of all terms of the resulting equation and by taking the real part of this equation, one obtains an equation that can be expressed as follows:

$$\frac{d[X]}{dX_j} = [M]^{-1}[\Pi], \quad (7)$$

where $[X]$ is a column vector with elements X_j ($j = 1, N$), $[M]$ is a $N \times N$ matrix whose elements are given by

$$M_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[\frac{\partial f^*}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \right] dt. \quad (8)$$

$[\Pi]$ is a column vector whose elements are given by

$$\Pi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial X_j} [V(f + q) - q_z] \right\} dt. \quad (9)$$

3. The presence of q_z in Eqs. (6) and (7) couples the equation of motion of the CCs to the one of the residual field. To decouple these two equations of motion, one must apply a second group of constraint defined by

$$\begin{aligned} \frac{dC_j}{dz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q_z \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \right] dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \right] dt = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

which imposes that the first constraints are satisfied for any z , $C_j \simeq 0$, if they are initially satisfied. So, by applying the second constraints, we obtain the equation of motion of the CCs in the matrix form given by (7), but where the right-hand side no longer contain q_z :

$$\Pi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[\frac{\partial f^*}{\partial X_i} V(f + q) \right] dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f^*}{\partial X_j} \right] dt. \quad (11)$$

Thus, the set of Eqs. (6), (7) and (11) constitute the full semi-analytical treatment of the GNLSE (1) by means of the CPO. This semi-analytical treatment is relatively lengthy and tedious, because it requires in reality a huge quantity of calculations to obtain the values of the CCs at every point of z . In practice, it is much faster to substitute for this semi-analytical treatment a totally numerical procedure that is strictly equivalent to the resolution of Eqs. (6) and (7), and which is based on the direct minimization of the residual-field energy (RFE). This procedure consists in solving numerically the GNLSE (by means of the split step Fourier method) to obtain ψ [1]. Then, one applies the first group of constraints to obtain the CCs in the following iterative way:

$$[X]_{(i+1)} = [X]_{(i)} - \left[\frac{\partial C}{\partial X} \right]_{(i)}^{-1} [C]_{(i)}. \quad (12)$$

On the other hand, the most useful approximation of the CC approach is the *bare approximation*, which is obtained by neglecting the residual field. This is equivalent to setting $q = 0$ in Eqs. (7) and (11), which leads to a substantial simplification of those equations.

But the most important point to note here is the following: the decisive stages in the resolution of Eqs. (7) and (12) are operations of matrix inversion ($[M]^{-1}$, $[\partial C / \partial X]^{-1}$). This stage is crucial for obtaining the analytical expressions of the rates of variation of CCs according to the waveguide parameters. In particular, the operation of matrix inversion $[M]^{-1}$ in a purely analytical way is possible only if the number of CCs is not too high. One can easily appreciate the scale of this difficulty on the calculations realized in Appendix B of Ref. [2], on the treatment of the interaction of two light pulses. In the next section, we show that it is possible to significantly simplify the analytical treatment described above by reformulating the CPO in a form of reduced projection operators of small sizes.

3. Reduced projection operators

3.1. Semi-analytical approach

The fundamental idea in our procedure of reformulation of the PO lies in a separated treatment for the amplitude and the phase of the pulse. Thus, by setting

$$\psi = \rho \exp(i\phi), \quad (13)$$

and then, by substituting the expression (13) in the GNLSE (1), and separating the real and imaginary parts, we obtain the following set of equations:

$$\rho_z = \tilde{V}(\rho, \phi) = \beta_2 \rho_t \phi_t + \frac{\beta_2}{2} \phi_{tt} \rho - \frac{\alpha}{2} \rho, \quad (14a)$$

$$\rho \phi_z = \hat{V}(\rho, \phi) = -\frac{\beta_2}{2} \rho_{tt} + \frac{\beta_2}{2} \rho \phi_2^2 + \gamma \rho^3, \quad (14b)$$

which describes the pulse dynamics between two consecutive amplifiers. We introduce the CCs in the system by decomposing the amplitude ρ and the phase ϕ in the following manner:

$$\rho(z, t) = g(x_1, x_2, \dots, x_m) + \tilde{q}(z, t), \quad (15a)$$

$$\phi(z, t) = h(y_1, y_2, \dots, y_l) + \hat{q}(z, t), \quad (15b)$$

where g and h are ansatz functions that represent respectively the temporal profile and the phase of the pulse, respectively. This definition of fields g and h exhibits clearly two distinct groups of CCs, namely, group (x_1, x_2, \dots, x_m) , which allows to describe the temporal profile of the pulse, while the group (y_1, y_2, \dots, y_l) serves to describe the pulse phase, with a total number of CCs which remains equal to

$$N = m + l. \quad (16)$$

Fields \tilde{q} and \hat{q} are the residual fields associated with g and h , respectively, such that $\psi = \rho \exp(i\phi)$ becomes the exact solution of the GNLS (1). Our reformulation of the operator of projection lies on the important fact that the ansatz function g , which describes the temporal profile of the pulse, does not depend directly on the parameters (y_1, y_2, \dots, y_l) which describe the pulse phase. Consequently the absence of ϕ_z in Eq. (14a), allows, after substitution of the ansatz (15a) in (14a), to obtain an equation describing specifically the dynamics of the group of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) , which we can express in a form similar to Eq. (6):

$$\tilde{q}_z + \sum_{j=1}^m \dot{x}_j \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j} = \tilde{V}(g, \tilde{q}, h, \hat{q}). \quad (17)$$

The absence of the group of CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) in the left-hand side of Eq. (17) allows us to define a first set of PO specifically dedicated to the group of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) :

$$\tilde{\phi}_j \equiv \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j}. \quad (18)$$

To this group of PO we can associate the first and second constraints conditions:

$$\tilde{C}_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q} \tilde{\phi}_j dt = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{C}_j}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{q}_z \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j} \right] dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{q} \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial x_i \partial x_j} \right] dt = 0. \quad (20)$$

Applying the PO (18) to Eq. (17) gives us a set of equations of motion for the group of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) , which can be put in the following form:

$$\frac{d[x]}{dz} = [\tilde{M}]^{-1}[\tilde{T}], \quad (21)$$

where $[x]$ is a column vector whose elements are x_j ($j = 1, \dots, m$). $[\tilde{M}]$ is a $m \times m$ matrix whose components are

$$\tilde{M}_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dt. \quad (22)$$

$[\tilde{T}]$ is a column vector whose elements are

$$\tilde{T}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j} \tilde{V}(g + \tilde{q}) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q} \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial x_i \partial x_j} dt. \quad (23)$$

To obtain the set of equations of motion for the group of CCs associated with the pulse phase, a possible procedure would be to proceed as we have done for the group of CCs associated with the temporal profile, that is, to define a set of POs for the group of CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) and to apply it to Eq. (14b). However such a procedure would have the huge disadvantage of introducing two distinct residual fields \tilde{q} and \hat{q} , for a single pulse field ψ . It is therefore more appropriate to define a single residual field q . To this end, it

is convenient to decompose the original field ψ according to the formula (2), but with an ansatz \hat{f} defined by means of the functions $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ and $h(y_1, y_2, \dots, y_l)$ of Eqs. (15):

$$\hat{f} \equiv g \exp[ih]. \quad (24)$$

However, as the quantities (x_1, x_2, \dots, x_m) and $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_m)$ are already known via Eq. (21), the equation of motion of the global residual field q may be obtained by means of Eq. (6). To this end, we can rewrite Eq. (6) in a more convenient form given by:

$$q_z + \sum_{i=1}^m \dot{y}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_i} = V(\hat{f} + q) - \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}. \quad (25)$$

The absence of the group of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) in the left-hand side of Eq. (25) allows us to define a second set of POs specifically dedicated to the group of CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) :

$$\hat{\phi}_j \equiv \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_j} = -i \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_j} \hat{f}^*. \quad (26)$$

To this second group of POs we associate the conditions of the first and second constraints as follows:

$$\hat{C}_j(y_1, y_2, \dots, y_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \Re[q \hat{\phi}_j] dt \simeq 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{C}_j}{dz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q_z \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_j} \right] dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q \left(\sum_{i=1}^l \dot{y}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Applying the PO (26) to Eq. (25) gives us the set of equations of motion for the group of CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) , which may be written in the following matrix form:

$$\frac{d[y]}{dz} = [\hat{M}]^{-1}[\hat{T}], \quad (29)$$

where $[y]$ is a column vector whose elements are y ($j = 1, \dots, l$). $[\hat{M}]$ is a $l \times l$ matrix whose elements are

$$\hat{M}_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[\frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_j} \right] dt. \quad (30)$$

$[\hat{T}]$ is a column vector whose elements are

$$\begin{aligned} \hat{T}_j &= \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[\frac{\partial \hat{f}^*}{\partial y_j} V(\hat{f} + q) \right] dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q \left(\sum_{i=1}^l \dot{y}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Thus, Eqs. (17), (21), (25), and (29), associated with constraints (19), (20), (27), and (28), constitute the full semi-analytical treatment of the pulse dynamics by means of our CCs approach based on the POs (18) and (26), which are the reduced POs (RPOs) elaborated in the present work. The main virtue of these two new operators is each one of them to have considerably less dimension compared to the dimension of the conventional operator ϕ_j used in previous works [2,18,19]. This reduction of the size of the POs ($m < N$ and $l < N$) should facilitate considerably the process for the derivation of the analytical equations of motion of the CCs.

3.2. Direct minimization of the residual-field energy

The semi-analytical treatment of the pulse dynamics by the CC approach, up to the resolution of the equations of motion of the residual field, as described in the previous subsection, is a lengthy and highly cumbersome procedure in terms of mathematical calculations. This semi-analytical treatment is justified only in particular situations which require a very fine analysis of the residual field, of the structure of its equation of motion, or of the precise nature of the terms that make up this equation. An example of such situations is the study of the process of spontaneous emission of radiation by light pulses propagating in a perturbed environment. Outside these cases, in most practical situations, the semi-analytical treatment is not necessary, and can be replaced by a fully numerical procedure (but completely equivalent to the semi-analytical treatment), based on the direct minimization of the residual-field energy. For example, the resolution of the set of equations of the first constraints (19) by the Newton–Raphson minimization procedure [28], can be easily executed by the following iterative procedure:

$$[x]_{(i+1)} = [x]_{(i)} - \left[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right]_{(i)}^{-1} [\tilde{C}]_{(i)}, \quad (32)$$

where the components of matrix $[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}]$ are given by

$$\left[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right]_{ij} = \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dt, \quad (33)$$

and where the residual field $\tilde{q} = \rho - g = |\psi| - g$ at every point of the propagation distance z , is obtained by solving the GNLSE (1). Although the numerical method of minimization of the residual-field energy (by means of our RPOs) is quantitatively strictly equivalent to the semi-analytical approach presented in the previous subsection, there is nevertheless a fundamental difference between both approaches. Indeed, Eqs. (1) and (32) allow us to obtain the evolution of the set of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) without any need to know the values of the CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) . Now, in the semi-analytical approach the evolution of any of the two sets of CCs for each step of spatial discretization requires the knowledge of the values of all of the two sets of CCs. In other words, our RPOs have the additional advantage over the CPO, of offering the opportunity of obtaining in a selective way the evolution of the particular set of CCs that one desires. In this context, it is useful to remind that the most important parameter of an optical pulse is its energy, because it determines immediately the possibilities and the fields of application of the pulse. As this energy depends only on the temporal profile of the pulse [and thus, depends only on the group of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) and \tilde{q}], we can establish (in a somewhat arbitrary manner) a certain hierarchy between the two groups of CCs. Thus we qualify the group of CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) as CCs of *first rank*, while the group of CCs (y_1, y_2, \dots, y_l) describing the pulse phase as CCs of *second rank*. In many practical situations, the CCs of first rank are sufficient to get a clear insight in the pulse behavior. However, if necessary, the dynamics of the CCs of second rank can be obtained in a manner similar to that of the group of first rank CCs (x_1, x_2, \dots, x_m) . So, the resolution of the set of equations of first constraints (27) can be easily performed by the Newton–Raphson minimization procedure [28], as follows:

$$[y]_{(i+1)} = [y]_{(i)} - \left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y} \right]_{(i)}^{-1} [\hat{C}]_{(i)}, \quad (34)$$

where the matrix elements $[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y}]$ are given by

$$\left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y} \right]_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[q \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 \hat{f}^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dt. \quad (35)$$

In the expression (35) the residual field $q = \psi - \hat{f}$ at every distance z is obtained by solving the GNLSE (1). The matrix equations (32) and (34), which are based on our RPO, have as advantage the use of matrices $([\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}], [\frac{\partial \hat{C}}{\partial y}])$ whose dimensions $(m \times m, l \times l)$ are substantially reduced as compared to the dimension of the matrix $[\frac{\partial C}{\partial X}](N \times N)$ associated with the CPO (5). In other words, our RPO allow a substantial reduction of the size of the matrix operations required for obtaining the values of the CCs by the procedure of direct minimization of the residual-field energy.

3.3. Bare approximation

One of the most useful CC approaches, which is also probably the most used in practice, is the variational approach. This approach, which is also called *bare approximation*, is obtained by neglecting the residual field. The bare approximation is very much appreciated for two major reasons:

1. The first reason is a considerable simplification of the amount and the complexity of the mathematical calculations necessary for solving the variational equations and obtaining the values of the CCs. Moreover, the use of our RPO brings back the theoretical treatment to the resolution of two sets of equations [(21) and (29)] which have as virtue, the use of matrices of smaller size that of the system corresponding to the CPO (7). This reduction in the size of matrices should allow to overcome more easily the decisive stage of matrix inversion (along with the ensuing algebraic manipulations), which is essential for obtaining explicit analytical expressions of the rates of variation of the CCs as functions of the system parameters.
2. The analytical expressions of the rates of variation of CCs according to the system parameters, which can be obtained in a practically exploitable form only by the bare approximation, is of crucial importance for a clear understanding of the pulse behavior. Indeed, the analytical expression of the rate of variation of a given CC will straightforwardly provide the mode of action of the propagation phenomena on this CC. The knowledge of this mode of action is very useful in activities of design and optimization of fiber components and systems. However, it should be recalled that the bare approximation gives quantitatively consistent results only if the ansatz function represents sufficiently well the pulse temporal profile. In other words, when this approximation is used, a special precaution must be taken in the choice of ansatz function.

4. Practical applications

In this section we present some examples of concrete situations where our RPO may be applied successfully. In this regard, it is interesting to have a quick overview of the difference between the CCs approach based on the CPO and the approach using the RPO, in the framework of the bare approximation. For clarity we will present both cases separately.

4.1. Bare approximation based on the CPOs

To illustrate our analysis, we consider the pulse propagation in a dispersion-managed system, where the pulse profile can be relatively well represented by a Gaussian ansatz function, such that:

$$f = X_1 \exp \left[-\frac{(t - X_2)^2}{X_3} \right] \times \exp \left\{ i \left[\frac{X_4}{2} (t - X_2)^2 + X_5 (t - X_2) + X_6 \right] \right\}, \quad (36)$$

where the CCs X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 and X_6 , represent the pulse amplitude, temporal position, width, chirp, frequency, and the phase constant. By setting $q = 0$ in Eq. (7), we obtain the following system

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_3}{2} & 0 & X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{X_1^2(X_4^2 + 4X_5^2X_3^2 + 4)}{2X_3} & 0 & \frac{-X_1^2X_5X_3^2}{4} & \frac{-X_1^2X_4X_3^2}{2} & -2X_1^2X_5X_3 \\ X_1 & 0 & \frac{3X_1^2}{2X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-X_1^2X_5X_3^2}{4} & 0 & \frac{3X_1^2X_5^2}{32} & 0 & \frac{X_1^2X_3^2}{4} \\ 0 & \frac{-X_1^2X_4X_3^2}{2} & 0 & 0 & \frac{X_1^2X_3^2}{2} & 0 \\ 0 & -2X_1^2X_5X_3 & 0 & \frac{X_1^2X_3^2}{4} & 0 & 2X_1^2X_3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\alpha X_1X_3 \\ \frac{-\beta_2X_1^2X_5(12+3X_1^2X_4^2+4X_5^2X_3^2)}{4X_3} - \gamma\sqrt{2}X_1^4X_5X_3 \\ \frac{-\alpha X_1^2}{2} - \beta_2X_1^2X_4 \\ \frac{\beta_2X_1^2X_3(-1+X_5^2X_3+\frac{3X_1^2X_4^2}{4})}{8} + \gamma\sqrt{2}X_1^4X_3 \\ \frac{\beta_2X_1^2X_4X_5X_3^2}{2} \\ \frac{\beta_2X_1^2(4+X_4^2X_3^2+4X_5^2X_3^2)}{4X_3} + \gamma\sqrt{2}X_1^4X_3 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

The main difficulty in Eq. (37) is the matrix inversion operation in the right-hand side of this equation, which must be realized to obtain explicit analytical expressions of the rates of variation of CCs as functions of the system parameters (α, β_2, γ). After tedious algebraic manipulations we obtain the following analytical expressions:

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{2}\beta_2X_1X_4 - \frac{\alpha}{2}X_1, \quad (38a)$$

$$\dot{X}_2 = -\beta_2X_5, \quad (38b)$$

$$\dot{X}_3 = -\beta_2X_3X_4, \quad (38c)$$

$$\dot{X}_4 = -\gamma\frac{\sqrt{2}X_1^2}{X_3^2} - \frac{4\beta_2}{X_3^4} + X_4^2\beta_2, \quad (38d)$$

$$\dot{X}_5 = 0, \quad (38e)$$

$$\dot{X}_6 = \gamma\frac{5\sqrt{2}X_1^2}{8} + \frac{\beta_2}{X_3^2} - \frac{\beta_2}{2}X_5^2. \quad (38f)$$

4.2. Bare approximation based on the RPOs

For ease of comparison with the bare approximation using the CPOs, it is convenient here to use the same ansatz function as for the case of the CPO given in (36). Thus, to represent the temporal profile of the pulse we choose the ansatz function

$$g = x_1 \exp\left[-\frac{(t-x_2)^2}{x_3^2}\right]. \quad (39)$$

Note that the CCs X_i , $i = 1, 2, 3$, for the ansatz (36) are renamed x_i , $i = 1, 2, 3$ in (39) to keep the notation used in Section 3. By setting $q = 0$ in Eq. (21), we obtain the following matrix equation:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & \frac{2x_1^2}{x_3} & 0 \\ x_1 & 0 & \frac{3x_1^2}{2x_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha x_1x_3 \\ \frac{-2\beta_2x_1^2x_5}{x_3} \\ -\beta_2x_1^2x_4 - \frac{\alpha x_1^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

The reduced size of the matrices involved in Eq. (40) makes its resolution much easier than Eq. (37). Then we obtain exactly the same analytical expressions for the rates of variation of the CCs that those given by formulae (38a), (38b), and (38c), but with the x_j instead of X_j , $j = 1, 2, 3$.

On the other hand, to obtain the equations of motion for the second group of CCs we choose the ansatz \hat{f} in the form given by Eq. (24), with g defined by Eq. (39), and h defined by:

$$h = \frac{y_1}{2}(t-x_2)^2 + y_2(t-x_2) + y_3. \quad (41)$$

It is worth noting that the CCs X_4, X_5 and X_6 in ansatz (36) have been renamed as y_1, y_2 and y_3 , respectively, in ansatz (41), to keep the notation used in Section 3.

By setting $q = 0$ in Eq. (29), we obtain the following matrix equation:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2x_3^5 & 0 & 8x_1^2x_3^2 \\ 0 & 16x_1^2x_3^3 & 0 \\ 8x_1^2x_3^3 & 0 & 64x_1^2x_3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_2x_1^2x_3(4y_2^2x_3^2 + 3y_1^2x_3^4 - 4) + 2\sqrt{2}\gamma x_1^4x_3^4 \\ 0 \\ \frac{8\beta_2x_1^2(4+y_1^2x_3^4+4y_2^2x_3^2-y_3^2x_3^2)}{x_3} + 32\sqrt{2}\gamma x_1^2x_3 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Similarly to Eq. (40), the reduced size of the matrices contained in Eq. (42) makes its resolution much easier than Eq. (37). Then we obtain exactly the same analytical expressions for the rates of variation of the CCs that those given by the formulae (38d), (38e), and (38f), but with $y_1 \Leftrightarrow X_4$, $y_2 \Leftrightarrow X_5$, $y_3 \Leftrightarrow X_6$, $x_1 \Leftrightarrow X_1$, $x_3 \Leftrightarrow X_3$.

4.3. Treatment of the spontaneous emission of radiation by an optical pulse

One of the less well known phenomena of pulse dynamics is the spontaneous emission of radiation by light pulses, which are affected (when entering a waveguide) by a profile distortion as compared to that of the stationary pulse in the waveguide. Indeed, at the practical level, the profiles of stationary pulses for most real physical systems are not feasible, and this is especially true for ultra short light pulses. A well-known example of virtually unattainable stationary pulse profile is the one of a dispersion-managed soliton, which is generally endowed with asperities (qualified as side lobes) [7], which are virtually impossible to synthesize with the currently available light sources. A realistic pulse is therefore generally more or less different from the ideal pulse. This difference gives rise to effects of radiation that may severely affect the stability of pulse propagation in fibers [29,30]. At the fundamental level, the onset of radiation is the result of the growth of one (or more) pairs of sidebands around the carrier frequency of the pulse. To date, in optics, processes that govern the spectral restructuring (leading to the sidebands of radiation) have not yet been clearly identified. In addition, so far there are neither method, nor analytical formula, nor parameters related to the pulse or to the waveguide, which allow to predict the importance of a radiation process induced by an initial distortion of the pulse profile. Our goal in this section is not to carry out a detailed study of this type of radiation phenomenon, but to show that the CC approach is one of the theoretical tools best able to provide the keys of the progress towards a better understanding of this type of phenomenon, and in particular, of the physical mechanisms underlying it.

The rigorous theoretical treatment of a radiation process requires knowledge of the profile of the stationary pulse in the waveguide, which henceforth will be denoted as A_S . It is important to note that the pulse A_S should in principle produce no radiation. To guarantee the best stability of propagation of pulses in the waveguide, in practice one strives to arrange so that the profile of the pulse that will be injected into the waveguide, which will be denoted as $u(z=0, t)$, is closest to the temporal profile of the

stationary pulse A_S . However, the injection of the field $u(z=0, t)$ corresponds in fact to an involuntary perturbation of the stationary profile, by a perturbation field σ such as

$$\psi = A_S + \sigma \quad (43)$$

where the amplitude of the perturbation field σ is in principle very low compared to that of A_S . Here, it should be noted that Eq. (43) is not identical to Eq. (2), because the field A_S is not an ansatz function, but a field whose profile depends strictly of the physical parameters of the waveguide. By substituting the relation (43) in the GNLSE, we obtain the following equation of motion of the perturbation field:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - i \gamma |\sigma|^2 \sigma + \frac{\alpha}{2} \sigma \\ = i \gamma (2|A_S|^2 \sigma + A_S^2 \sigma^*) \end{aligned} \quad (44)$$

where we have neglected the higher-order non-linear interaction terms ($\propto \sigma^2$) in the right-hand side of Eq. (44), and also we have taken into account the fact that the field A_S is the stationary solution of the GNLSE:

$$\frac{\partial A_S}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_S}{\partial t^2} - i \gamma |A_S|^2 A_S + \frac{\alpha}{2} A_S = 0. \quad (45)$$

Here it is useful to stress the fact that the terminology ‘stationary solution’ means that the pulse recovers exactly its original intensity profile after each amplifier. Conceptually, the perturbation field σ consists of two components:

1. The first is a field located in the central part of the pulse. We will denote it as σ_L , and we will call it as *trapped field*. This field interacts strongly with the stationary pulse, and modifies the internal dynamics of the global pulse. This interaction is accompanied by an energy-exchange process induced by the second term of the right-hand side of Eq. (44), and may lead to the collapse of the pulse if the initial amplitude of the perturbation field is too high.
2. The second component of the perturbation field is radiation, that will be designated as σ_R . This field interacts strongly with the pulse only in the beginning part of the dynamics, during the phase of restructuring of the initial pulse profile. This interaction, which is done by cross-phase modulation induced by the first term in the right-hand side of Eq. (44), plays a decisive role in the process of restructuring of profile which leads to the emergence of the sidebands of radiation. An excellent approximation of the radiation dynamics is thus given by:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_R}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial t^2} - i \gamma |\sigma_R|^2 \sigma_R + \frac{\alpha}{2} \sigma_R \\ = 2i \gamma |A_S|^2 \sigma_R. \end{aligned} \quad (46)$$

More generally, the initial perturbation of the stationary profile of the pulse, induces a multitude of phenomena including trapping and radiation phenomena, which take place simultaneously and which are practically impossible to analyze by merely considering the pulse field $\psi(z, t)$. In this context, the equation of motion for the perturbation (44) and that of the radiation (46), offer an excellent opportunity to gain some insight in those phenomena. But these two equations have a complexity in the analysis. Indeed, obtaining the evolution of the perturbation field σ , as well as the radiation field σ_R , requires beforehand the knowledge of the temporal profile of the stationary pulse $A_S(z, t)$ which is present in the right-hand side of Eqs. (44) and (46). As the analytical expression of $A_S(z, t)$ is unknown for most real physical systems, the

resolution of Eqs. (44) and (46) requires beforehand that there is a numerical method allowing to obtain the initial profile of the stationary pulse, $A_S(z=0, t)$. Then, for obtaining the radiation field we must first solve Eq. (45) and make use of the resulting solution $A_S(z, t)$ to solve Eq. (46). This procedure of simultaneous resolution of Eqs. (45) and (46) is somewhat tedious and cumbersome in calculations. We show below how the use of our CC approach allows to reduce drastically the amount of calculation operations, while providing the best knowledge on the fundamental mechanisms that underlie the process of spontaneous emission of radiation.

The first step of our CC approach consists in approximating the stationary profile $A_S(z, t)$ by the ansatz function \hat{f} defined in the expression (24). By adopting (for example) the following choice for functions g and h :

$$g = x_1 \exp \left[-\frac{(t-x_2)^2}{x_3^2} \right], \quad (47a)$$

$$h = \frac{x_4}{2} (t-x_2)^2 + x_5 (t-x_2) + x_6, \quad (47b)$$

the RPO method leads to the set of ODEs (38), whose resolution leads, at every point of z , to the set of CCs x_j , $j = 1, 2, \dots, 6$. Then, we can proceed in two ways to obtain the radiation field:

1. The first way consists in treating only Eq. (45) by the CC method, and in solving directly Eq. (46) by the split-step Fourier method. The CCs of the stationary pulse are then used to reconstruct its approximate temporal profile via the ansatz function \hat{f} :

$$A_S(z, t) \simeq \hat{f}[x_1(z), x_2(z), \dots, x_6(z), t] = g \exp(ih) \quad (48)$$

where g and h are defined in Eqs. (47). Then we can numerically solve Eq. (46). It is important to note that the amount of calculations necessary to obtain the values of the CCs x_j by means of the set of equations (38), at each point of z , represents only a very small fraction of the amount of calculations needed to solve Eq. (45).

2. On the other hand, we can obtain the radiation field in more expeditious way by treating both Eqs. (45) and (46), by means of the CC approach. Treatment of Eq. (46) requires that we define an ansatz for radiation. For sake of simplicity, we can choose a Gaussian ansatz to describe the radiation profile:

$$\begin{aligned} \sigma_R \simeq y_1 \exp \left\{ -\frac{(t-y_2)^2}{y_3^2} \right. \\ \left. + i \left[\frac{y_4}{2} (t-y_2)^2 + y_5 (t-y_2) + y_6 \right] \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

where we have used the same set of CCs to designate both the Stokes component of radiation ($y_2 = |y_2|$, $y_5 = -|y_5|$) and the anti-Stokes component ($y_2 = -|y_2|$, $y_5 = |y_5|$). By applying the bare approximation to Eq. (46) with our RPO and the ansatz (49), we obtain the following set of ODEs:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{2} \beta_2 y_1 y_4 - \frac{\alpha}{2} y_1, \quad (50a)$$

$$\dot{y}_2 = -\beta_2 y_5, \quad (50b)$$

$$\dot{y}_3 = -\beta_2 y_3 y_4, \quad (50c)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_4 = \left(y_4^2 - \frac{4}{y_3^4} \right) \beta_2 - \frac{\sqrt{2} y_1^2}{y_3^2} \gamma \\ + \gamma \frac{8 x_3 x_1^2 [-x_3^2 - y_3^2 + 4(x_2 - y_2)^2]}{(x_3^2 + y_3^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\times \exp\left[-\frac{2(x_2 - y_2)^2}{x_3^2 + y_3^2}\right], \quad (50d)$$

$$\dot{y}_5 = \gamma \frac{8x_3x_1^2(x_2 - y_2)}{(x_3^2 + y_3^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{2(x_2 - y_2)^2}{x_3^2 + y_3^2}\right], \quad (50e)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_6 = & -\frac{1}{2}\left(y_5^2 - \frac{2}{y_3^2}\right)\beta_2 + \frac{5\sqrt{2}y_1^2}{8}\gamma \\ & - \gamma \frac{x_3x_1^2[-2x_3^4 - 5x_3^2y_3^2 - 3y_3^4 + 4y_3^2(x_2 - y_2)^2]}{(x_3^2 + y_3^2)^{5/2}} \\ & \times \exp\left[-\frac{2(x_2 - y_2)^2}{x_3^2 + y_3^2}\right]. \end{aligned} \quad (50f)$$

So, the two sets of ODEs (38) and (50) constitute the full theoretical treatment of the phenomenon of radiation emitted by a light pulse, by a CC approach that neglects the residual field. This treatment has two major virtues as compared to the procedure of direct resolution of Eqs. (45) and (46):

1. The drastic reduction in the amount of calculation operations that this treatment provides allow us to expeditiously obtain the dynamical behavior of the radiation.
2. The second major advantage is the availability of analytical expressions for the rates of variation of the pulse parameters X_j (38), and of the radiation parameters y_j (50), as functions of the system parameters. In particular the interaction process that stimulates the restructuring of the perturbation field into a form of radiation, is represented by the terms containing an exponential in the right-hand side of Eqs. (50). One can also clearly identify the mode of action of the linear effects (loss, dispersion) and non-linear effects, on each of the radiation parameters.

5. Conclusion

CC approaches constitute a powerful theoretical method of analysis of the behavior of physical systems that can exhibit effects of localization of energy with relatively long lifetime. In optics, such effects occur in the form of very robust light pulses, which are able to propagate over very long distances (several thousands of kilometers). The propagation of a light pulse does not correspond to a simple translation of a packet of energy through the waveguide. In general, the light pulse always performs internal vibrations that are more or less important depending on the conditions of injection of the pulse in the waveguide, or/and the physical structure of the waveguide. More generally, whenever a physical entity moves while executing internal deformations, CC methods become compelling in the analysis of its full dynamic behavior (including its internal dynamics). Several CC approaches have been introduced in the literature and exploited intensively over the past two decades. These CC methods include the PO approach, which was first used in condensed-matter physics [27] for more than a decade before being successfully applied to the description of the dynamical behavior of light pulses in fibers. However, conventional PO methods, such as other CC methods, requires some algebraic manipulations (to obtain analytical expressions of the rates of variation of the CCs as functions of the waveguide parameters), which become insuperable when the number of CCs is relatively high. In other words, the possibility of setting up analytical formulas for the rates of variation of the CCs weakens when the size of the PO (which is proportional to the number of CCs) increases.

In this work, we have shown that it is possible to substitute for conventional POs of large sizes, new POs of considerably re-

duced sizes, that we have called as the *reduced POs* (RPOs). This reformulation of the projection operation was realized by treating separately the evolution of the pulse phase and evolution of the pulse amplitude, by means of two different POs (one for the amplitude, and the other for the phase).

We have shown that the use of the RPOs (instead of the CPO) reduces drastically the complexity of algebraic manipulations in all approaches of CCs that use (directly or indirectly) these RPOs, namely, full semi-analytical treatment (which includes the residual field), the bare approximation (which neglects the residual field), and the numerical procedure of direct minimization of the residual field. We have illustrated the performance of this RPO method by applying it successfully to the treatment of the delicate issue of the spontaneous emission of radiation by a light pulse affected by profile distortions at the fiber input.

Finally, the RPO method proposed in the present work is a step forward in the optimization of theoretical tools of analysis of the dynamical behavior of light pulses in dielectric waveguides. This method will particularly facilitate the analysis of the stability of propagation of pulses subject to strong internal dynamics induced by the structure of the physical medium (transmission lines, fiber lasers, etc.), or by distortions of the input pulse profile, or by events such as pulse collisions.

Acknowledgements

E. Tchomgo Felenou acknowledges the Service de Coopération et d'Action Culturelle (SCAC) de la France au Cameroun, for his financial support.

References

- [1] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1995.
- [2] P. Tchofo Dinda, A.B. Moubissi, K. Nakkeran, *Phys. Rev. E* 64 (2001) 016608.
- [3] A. Hasegawa, F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* 23 (1997) 171.
- [4] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 1095.
- [5] F.M. Knox, W. Forsyth, N.J. Doran, *J. Lightwave Technol.* 13 (1995) 1955.
- [6] E.G. Shapiro, S.K. Turitsyn, *Opt. Lett.* 22 (1997) 1544.
- [7] S.K. Turitsyn, T. Schäfer, K.H. Spatschek, V.K. Mezentsev, *Opt. Commun.* 163 (1999) 122.
- [8] H. Sugahara, T. Inoue, A. Maruta, Y. Kodama, *Electron. Lett.* 34 (1998) 902.
- [9] W. Forsyth, J.L.F. Devaney, N.J. Smith, N.J. Doran, *Opt. Lett.* 22 (1997) 600.
- [10] K. Tamura, E.P. Ippen, H.A. Haus, L.E. Nelson, *Opt. Lett.* 18 (1993) 1080.
- [11] K. Tamura, L.E. Nelson, H.A. Haus, E.P. Ippen, *Appl. Phys. Lett.* 64 (1994) 149.
- [12] L.E. Nelson, D.J. Jones, K. Tamura, H.A. Haus, E.P. Ippen, *Appl. Phys. B* 65 (1997) 277.
- [13] B.G. Bale, S. Boscolo, O.Y. Schwartz, S.K. Turitsyn, *Adv. Nonlin. Opt.* 2009 (2009) 181467.
- [14] S. Chouli, J.M. Soto-Crespo, P. Grelu, *Appl. Phys. B* 19 (2011) 2959.
- [15] N.G. Usechak, G.P. Agrawal, J.D. Zuegel, *IEEE J. Quantum Electron.* 41 (2005) 753.
- [16] Boris A. Malomed, *Prog. Opt.* 43 (2002) 71.
- [17] J.G. Caputo, C.B. Clausen, M.P. Sørensen, S. Bischoff, *J. Opt. Soc. Am. B* 17 (2000) 705.
- [18] K. Nakkeeran, Y.H.C. Kwan, A. Labruière, P. Tchofo Dinda, A.B. Moubissi, *J. Opt. Soc. Am. B* 21 (2004) 1901.
- [19] J. Atangana, A. Kamagate, P. Tchofo Dinda, A. Labruière, T.C. Kofane, *J. Opt. Soc. Am. B* 26 (2009) 371.
- [20] K. Nakkeeran, P.K.A. Wai, *Opt. Commun.* 244 (2005) 377.
- [21] J.G. Caputo, N. Flytzanis, M.P. Sørensen, *J. Opt. Soc. Am. B* 12 (1995) 139.
- [22] S.K. Turitsyn, V.K. Mezentsev, *JETP Lett.* 67 (1998) 640.
- [23] S.K. Turitsyn, I. Gabitov, E.W. Laedke, V.K. Mezentsev, S.L. Musher, E.G. Shapiro, T. Schäfer, K.H. Spatschek, *Opt. Commun.* 151 (1998) 117.
- [24] S.K. Turitsyn, E.G. Shapiro, *Optical Fiber Technol.* 4 (1998) 151.
- [25] O.Y. Schwartz, S.K. Turitsyn, *Phys. Rev. A* 67 (2007) 043819.
- [26] D. Anderson, *Phys. Rev. A* 27 (1983) 3135.
- [27] R. Boesch, P. Stancioff, C.R. Willis, *Phys. Rev. B* 38 (1998) 6713.
- [28] A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [29] C.M. Ngabireng, P. Tchofo Dinda, A. Tonello, K. Nakkeran, P.K. Wai, T.C. Kofane, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 036613.
- [30] C.M. Ngabireng, P. Tchofo Dinda, *Opt. Lett.* 30 (2005) 595.

Bibliographie

- [1] N. J. ZABUSKY, and M. D. KRUKAL. *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.* Phys. Rev. Lett, 15 :240–243, 1965.
- [2] A. HASEGAWA , and F. TAPPERT. *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion.* Appl. Phys. Lett., 23 :142–144, 1973.
- [3] L. F. MOLLENAUER, R. H. STOLEN, and J. P. GORDON. *Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers.* Phys. Rev. Lett., 45 :1095–1098, 1980.
- [4] Michel RAMOISSENET. Waves called solitons : concepts and experiments. 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [5] St. PNEVMATIKOS , M. REMOISSENET, and N. FLYTZANIS. *Propagation of acoustic and optical solitons in nonlinear diatomic chains.* J. Phys. C : Solid State Phys., 16 :L305, 1983.
- [6] E.A. KUZNETSOV , A.M. RUBENCHIK, and V.E. ZAKHAROV. *Soliton stability in plasma and hydrodynamics.* Physics reports (Review Section of Physics Letters), 142 :103–165, 1986.
- [7] Y. H. ICHIKAWA , and S. WATANABE. *Solitons, envelope solitons in collisionless plasma.* J. Phys. colloques, 38 :C6–1–C6–15, 1977.
- [8] S. V. ANTIPOV, M.V. NEZLIN, and A. S. TRUBNIKOV. *Oblique Langmuir solitons and their self-compression in the "free-flight" regime.* Sov. Phys. JETP, 51 :874–1–878, 1980.

-
- [9] C. WILLIS, M. EL-BATANOUNY, and P. STANCIOFF. *Sine-Gordon kinks on a discrete lattice. I. Hamiltonian formalism.* Phys. Rev. B, 33 :1904–1–1911, 1980.
 - [10] V. I. KARPMAN, and E. M. MASLOV. *Perturbation theory for soliton.* Sov. Phys. JETP, 46 :281–291, 1978.
 - [11] V. I. KARPMAN. *Soliton evolution in the presence of perturbation.* Physica Scripta, 20 :462–478, 1979.
 - [12] K. H. KARPMAN. *Adiabatic behavior of Sine Gordon soliton in the presence of perturbation.* Z. Physik B, 32 :425–430, 1979.
 - [13] J. P. KEENER, and D. W. MCLAUGHIN. *Solitons under perturbations.* Phys. Rev. A, 16 :777–790, 1977.
 - [14] G. B. WHITHAM. *Linear and nonlinear waves.* John Willey and Sons, 1974.
 - [15] A. BONDESON, M. LISAK, and D. ANDERSON. *Soliton perturbations : A variational principle for the soliton parameters.* Physica Scripta, 20 :479–485, 1979.
 - [16] M. B. FOGEL, S. E. TRULLINGER, A. R. BISHOP, and J. A. KRUMHANS. *Classical particle-like behavior of Sine-Gordon solitons in scattering potentials and applied fields.* Phys. Rev. Lett, 36 :1411–1414, 1976.
 - [17] M. B. FOGEL, S. E. TRULLINGER, A. R. BISHOP, and J. A. KRUMHANS. *Dynamics of Sine Gordon solitons in the presence of perturbations.* Phys. Rev. B, 15 :1578–1592, 1977.
 - [18] K. NAKAJIMA, T. YAMASHITA, and Y. ONODERA. *Mechanical analogue of active Josephson transmission line.* J. Appl. Phys., 45 :3141–3145, 1974.
 - [19] V. G. MAKHANOV. *Computer and solitons.* Physica scripta, 1979.
 - [20] Benoît CHARBONNIER. Thèse. *Contribution à l'étude de systèmes monodimensionnels de transmission de solitons pour les réseaux terrestres.* ENST 97E039, 1997.
 - [21] P. TCHOFO DINDA, R. BOESCH, E. COQUET, and C. R. WILLIS. *Discreteness effects on the double-quadratic kink.* Phys. Rev. B, 46 :3311–3325, 1992.
 - [22] Claude Marie NGABIRENG. Thèse. *Emission spontanée de rayonnement par des impulsions ultra-brèves dans les lignes de communication par fibres optiques à gestion de la dispersion,* université de Yaoundé I, 2004.

-
- [23] C. M. NGABIRENG, P. TCHOFO DINDA, A. TONELLO, K. NKKERRAN, P. K. WAI, and T. C. KOFANE. *Radiating and nonradiating behavior of hyperbolic-secant, raised-cosine, and Gaussian input light pulses in dispersion-managed fiber systems.* Phys. Rev. E, 72 :(036613)1–12, 2005.
 - [24] C. M. NGABIRENG, and P. TCHOFO DINDA. *Radiating and non-radiating dispersion-managed solitons.* Opt. Lett., 30 :595–597, 2005.
 - [25] R. BOESCH, C. R. WILLIS, and M. ELBATANOUNY. *Spontaneous emission of radiation from a discrete sine-gordon kink.* Phys. Rev. B, 40 :2284–2296, 1989.
 - [26] K. NAKKEERAN, Y. H. C. KWAN, P. K. A WAI, A. LABRUYÈRE, P. TCHOFO DINDA, and A. B. MOUBISSI. *Analytical design of densely dispersion-managed optical fiber transmission systems with Gaussian and raised cosine return-to-zero Ansätze.* J. Opt. Soc. Am. B, 21 :1901–1907, 2004.
 - [27] J. H. B. NIJHOF, N. J. DORAN, W. FORYSIAK, and F. M. KNOX. *Stable soliton-like propagation in dispersion managed systems wiyh net anomalous, zero and normal dispersion.* Electron Lett., 33 :1726–1728, 1997.
 - [28] S. K. TURITSYN, N. J. DORAN, J. H. B. NIJHOF, V. K. MEZENTSEV, T. SHAEFER, and W. FORYSIAK. Ed. by V. E. Zakharov and S. Wabnitz, Kluwer Academic Publishers. *Dispersion-Managed Solitons, in Theoretical Challenges and Industrial Perspectives.* Dordrecht, The Netherlands, 1999.
 - [29] S. K. TURITSYN, V. K. MEZENTSEV, and E. G. SHAPIRO. *Dispersion-managed solitons and optimization of the dispersion management.* Opt. Fiber Techn., 4 :384, 1998.
 - [30] R. BOESCH, P. STANCIOFF, and C. R. WILLIS. *Hamiltonian equations for multiple-collective-variable theories of nonlinear Klein-Gordon equations : A projection-operator approach.* Phys. Rev. B, 38 :6713–6735, 1998.
 - [31] G. P. AGRAWAL. *Fiber-Optic Communication Systems.* 3th ed., Wiley, New York, 2002.
 - [32] E. DESURVIRE. *Erbium doped amplifiers : Principles and Application.* John Wiley and Sons, New York, 1994.

-
- [33] G. P. AGRAWAL. *Nonlinear Fiber Optics*. 4th ed., Academic Press, San Diego, 2007.
 - [34] L. G. COHEN. *Comparison of single-mode fiber dispersion measurement techniques*. J. Lightwave Technol., 3 :958–966, 1985.
 - [35] M. J. ADAMS. *An Introduction to Optical Waveguides*. John Wiley and Sons, New York, 1981.
 - [36] I. H. MALITSON. *Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica*. J. Opt. Soc. Am., 55 :1205, 1965.
 - [37] Y. R. SHEN,. *Principe of Nonlinear Optics*. Wiley, New York, 1984.
 - [38] G. MILLOT and P.TCHOFO DINDA. *Nonlinear effects*. Encyclopedia of Moderne Optics Elsevier Ltd, 12 :467, 2004.
 - [39] V. E. ZAKHAROV, and S. WABNITZ. *Optical soliton : Theoritical challenges and industrial perspective*. Springer-Verlag, 1998.
 - [40] G. P. AGRAWAL. *Nonlinear Fiber Optics*. 2nd ed., New York Academic Press, 1995.
 - [41] P. TCHOFO DINDA, A. B. MOUBISSI, and K. NAKKEERAN. *A collective variable theory for soliton in optical fibers*. Phys. Rev. E, 64 :(016608)1–15, 2001.
 - [42] Alain-Brice MOUBISSI. Thèse. *Application de la méthode des coordonnées collectives à la conception des lignes de transmission à gestion de la dispersion, haut débit et longue distance, sur fibres optiques*. Université de Bourgogne, 2002.
 - [43] F. M. KNOX, W. FORYSIAK, and N. J. DORAN. *10-Gbit/s soliton communication-systems over standard fiber at 1.55 μ m and the use of dispersion compensation*. J. Lightwave Technol., 13 :1955–1962, 1995.
 - [44] S. K. TURITSYN, T. SCHÄFER, K. H. SPATSCHEK, and V. K. MEZENTSEV. *Path-averaged chirped optical soliton in dispersion-managed fiber communication lines*. Opt. Commun., 163 :122–158, 1999.
 - [45] H. SUGAHARA, T. INOUE, A. MARUTA, and Y. KODAMA. *Optical dispersion management for Wavelength-Division-Multiplexed RZ optical pulse transmission*. Electron Lett., 34 :902–904, 1998.

-
- [46] W. FORYSIAK, J. L. F. DEVANEY, N. J. SMITH, and N. J. DORAN. *Dispersion management for Wavelength-Division-Multiplexed soliton transmission.* Opt. Lett., 22 :600–602, 1997.
 - [47] A. HASEGAWA, and F. TAPPERT. *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion.* App. Phys. Lett. E, 23 :171–172, 1973.
 - [48] K. TAMURA, E. P. IPPEN, H. A. HAUS, and L. E. NELSON. *77-fs pulse generation from a stretched-pulse mode-locked all-fiber ring laser.* Opt. Lett., 18 :1080, 1993.
 - [49] K. TAMURA, L. E. NELSON, H. A. HAUS, and E. P. IPPEN. *Soliton versus nonsoliton operation of fiber ring lasers.* Appl. Phys. Lett., 64 :149, 1994.
 - [50] L. E. NELSON, D. J. JONES, K. TAMURA, H. A. HAUS, and E. P. IPPEN. *Ultrashort-pulse fiber ring lasers.* Appl. Phys. B, 65 :277–294, 1997.
 - [51] S. CHOULI, J. M. SOTO-CRESPO, and P. GRELU. *Optical spectra beyond the amplifier bandwidth limitation in dispersion-managed mode-locked fiber lasers.* Appl. Phys. B, 19 :2959–2964, 2011.
 - [52] N. G. USECHAK, G. P. AGRAWAL, and J. D. ZUEGEL. *FM mode-locked fiber lasers operating in the autosoliton regime.* IEEE J. Quantum Electronics., 41 :753–761, 2005.
 - [53] Boris A. MALOMED. *Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields.* Progress in Optics, 43 :71–193, 2002.
 - [54] J. G. CAPUTO, C. B. CLAUSEN, M. P. SORENSEN, and S. BISCHOFF. *Amplitude-modulated fiber-ring laser.* J. Opt. Soc. Am. B, 17 :705–711, 2000.
 - [55] J. ATANGANA, A. KAMAGATE, P. TCHOFO DINDA, A. LABRUYÈRE, and T. C. KOFANE. *Effective characterization of the phase and intensity profiles of asymmetrically distorted light pulses in optical fiber systems.* J. Opt. Soc. Am. B, 26 :371–383, 2009.
 - [56] J. G. CAPUTO, N. FLYTZANIS, and M. P. SORENSEN. *Ring laser configuration studied by collective coordinates.* J. Opt. Soc. Am. B, 12 :139–145, 1995.
 - [57] S. K. TURITSYN, I. GABITOV, E. W. LAEDKE, V. K. MEZENTSEV, S. L. MUSER, E. G. SHAPIRO, T. SCHÄFER, and K. H. SPATSCHEK. *Variational ap-*

-
- proach to optical pulse propagation in dispersion compensated transmission systems.* Opt. Commun., 151 :117–135, 1998.
- [58] M. TAKI, J. C. FERNANDEZ, and G. REINISCH. *collective-coordinate description of chaotic sine-Gordon breathers and zero-frequency breathers : The nondissipative case.* Phys. Rev. A, 38 :3086–3097, 1988.
- [59] M. TAKI, K. H. SPATSCHEK, J. C. FERNANDEZ, R. GRAUER, and G. REINISCH. *Breather dynamics in the nonlinear Schrödinger regime of perturbed sine-Gordon systems.* Physica D, 40 :65–82, 1989.
- [60] A. RALSTON. *A First Course in Numerical Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1965.
- [61] P. TCHOFO DINDA, A. LABRUYÈRE, and K. NAKKEERAN. *Theory of RAMAN effect on solitons in optical fiber systems : Impact and control processes for high-speed long-distance transmission lines.* Opt. Commun., 234 :137–151, 2004.
- [62] A. YANG, X. LI, and D. WU. *Combined impact of group velocity dispersion, Kerr effect and polarization mode dispersion in optical fibers.* Opt. Commun., 214 :133–139, 2002.
- [63] D. WOOD,. *Constraints on the bit rates in direct detection optical communication systems using linear or soliton pulses.* Lightwave Technology, 8 :1097–1106, 1990.
- [64] Y. KODAMA,. *Optical Solitons in a Monomode Fiber.* Journal of Statistical Physics, 39 :597–612, 1985.
- [65] F. M. MITSCHKE, and L. F. MOLLENAUER. *Discovery of the soliton self-frequency shift.* Opt. Lett., 11 :659–661, 1986.
- [66] S. L. PALACIOS, A. GUINEA, J. M. FERNÁNDEZ-DÍAZ, and R. D. CRESPO,. *Dark solitary waves in the nonlinear Schrödinger equation with third order dispersion, self-steepening, and self-frequency shift.* Phys. Rev. E, 60 :R45–R47, 1999.
- [67] J. P. GORDON and H. A. HAUS. *Random walk of coherently amplified solitons in optical fibers transmission.* Opt. Lett., 11 :665–667, 1986.
- [68] J. NATHAN KUDZ and P. K. A WAI. *Noise-induced amplitude and chirp jitter in dispersion-manged soliton communications.* Opt. Lett., 23 :1022–1024, 1998.

-
- [69] Y. KODAMA, M. ROMAGNOLI, S. WABNITZ, and M. MIDRIO,. *Role of third-order dispersion on soliton instabilities and interactions in optical fibers.* Opt. Lett., 19 :165–167, 1994.
 - [70] F. M. MITSCHKE, and L. F. MOLLENAUER. *Experimental observation of interaction forces between solitons in optical fibers.* Opt. Lett., 12 :355–357, 1987.
 - [71] Y. CHUNG, V. V. LEBEDEV and S. S. VERGELES. *Interaction of solitons through radiation in optical fibers with randomly varying birefringence.* Opt. Lett., 29 :1245–1247, 2004.
 - [72] A. N. PINTO and G. P. AGRAWAL. *Nonlinear interaction between signal and Noise in Optical Fibers.* J. Lightwave Technol., 26 :1847–1853, 2008.
 - [73] N. J. SMITH, K. J. BLOW and I. ANDONOVIC. *Side band generation through perturbations to the average soliton model.* J. Lightwave Technol., 10 :1329–1333, 1992.
 - [74] R. SAMUDRA, S. K. BHADRA and G. P. AGRAWAL. *Dispersive waves emitted by solitons perturbed by third-order dispersion inside optical fibers.* Phys. Rev. A, 79 :(023824) 1–6, 2009.
 - [75] A. V. HUSAKOU and J. HERRMANN. *Supercontinuum Generation of Higher-Order Solitons by Fission in Photonic Crystal Fibers.* Phys. Rev. Lett., 26 :(203901)1–4, 2001.
 - [76] R. SAMUDRA, S. K. BHADRA and G. P. AGRAWAL. *Effet of higher-order dispersion on resonant dispersive wave emitted by solitons.* Opt. Lett., 34 :2072–2074, 2009.
 - [77] P. K. WAI, H. H. CHEN, and Y. C. LEE,. *Radiations by "solitons" at the zero group-dispersion wavelength of single-mode optical fibers.* Phys. Rev. A, 41 :426–439, 1990.
 - [78] N. AKHMELDIEV, and MAGNUS KARLSON,. *Cherenko radiation emitted by soliton in optical fiber.* Phys. Rev. A, 21 :2602–2612, 1995.
 - [79] V. I. KAPMAN. *Radiation by solitons due to higher-order dispersion.* Phys. Rev. E, 47 :2073–2082, 1993.

-
- [80] T. GEORGES and B. CHARBONNIER. *Continuum generate by chromatic dispersion and power variation in periodically amplified soliton links.* Electron. Lett., 21 :1174–1175, 1996.
 - [81] J. P. GORDON. *Dispersive perturbations of solitons of non linear Schödinger equation.* J. Opt. Soc. Am. B, 9 :91–97, 1992.
 - [82] T. I. LAKOBA and G. P. AGRAWAL. *Effet of third-order dispersion on dispersion managed solitons.* J. Opt. Soc. Am. B, 16 :1332–1343, 1999.
 - [83] S. M. KELLY. *Characteristic sideband instability of periodically amplified average soliton.* Electron. Lett., 28 :806–807, 1992.
 - [84] N. PANDIT, D. U. NOSKE, S. M. J. KELLY and J. R. TAYLOR. *Characteristic instability of fibre loop soliton lasers.* Electron. Lett., 28 :455–457, 1992.
 - [85] J. N. ELGIN and S. M. J. KELLY. *Spectral modulation and the growth of resonant modes associated with periodically amplified solitons.* Opt. Lett., 18 :787–789, 1993.
 - [86] YU FENG SONG, HAN ZHANG, DING YUAN TANG, and DE YUAN SHEN. *Polarization rotation vector solitons in a graphene mode-locked fiber laser.* Opt. Express, 20 :27283–27289, 2012.
 - [87] J. M. SOTO-CRESPO, NAIL AKHMEDIEV, Ph. GRELU, and F. BELHACHE. *Quantized separations of phase-locked soliton pairs in fiber lasers.* Opt. Lett., 28 :1757–1759, 2003.
 - [88] ALEXANDER KILLI and UWE MORGNER. *Solitary pulse shaping dynamics in cavity-dumped laser oscillators.* Opt. Express, 12 :3397–3407, 2004.
 - [89] L. E. NELSON, D.J. JONES, K. TAMURA, H. A. HAUS and E. P. IPPEN. *Ultrashort-pulse fiber ring lasers.* Appl. Phys. B, 65 :277–294, 1997.
 - [90] RAFI WEILL, ALEXANDER BEKKER, VLADIMIR SMULAKOVSKY, BARUCH FISCHER and OMRI GAT. *Spectral Sidebands and Multi-Pulse Formation in Passively Mode Locked Lasers.* Phys. Rev. A, 83, 2011.
 - [91] AKIRA GEORGES and YUJI KODOMA. *Guiding-center soliton in optical fibers.* Opt. Lett., 15 :1443–1445, 1990.

-
- [92] P. TCHOFO DINDA, A. LABRUYÈRE, K. NAKKEERAN, J. FATOME, B. MOUBISSI, S. PITOIS and G. MILLOT. *On the designing of densely dispersion-managed optical fiber systems for ultrafast optical communication.* Ann. Telecommun., 58 :1785–1808, 2003.
- [93] Sergei K. TURITSYN, Vladimir K. MEZENTSEV, and Elena G. SHAPIRO. *Dispersion-Managed Solitons and Optimization of the Dispersion Management.* Opt. Fiber Technolo., 4 :384–452, 1998.
- [94] Sergei K. TURITSYN, and Elena G. SHAPIRO. *Variational Approach to the Design of Optical Communication Systems with Dispersion Management.* Optical Fiber Techno., 4 :151–188, 1998.
- [95] Elena G. SHAPIRO, and Sergei K. TURITSYN. *Theory of guiding-center breathing soliton propagation in optical communication systems with strong dispersion management.* Opt. Lett., 22 :1544–1546, 1997.
- [96] Brandon. G. BALE, Sonia BOSCOLO, Osip. Y. SCHWARTZ and Sergei K. TURITSYN. *Localized Waves in Optical Systems with Periodic Dispersion and Nonlinearity Management.* Advances in Nonlinear Optics, 2009 :(181467) 1–13, 2009.
- [97] E. TCHOMGO FELENOU, P. TCHOFO DINDA, C. M. NGABIRENG and K. NAKKEERAN. *Collective Coordinate Theory for Light Pulses in Fibers : The Reduced Projection Operators.* Phys. Lett. A, 377 :770–777, 2013.

Cartographie unifiée de la dynamique des solitons dans les guides d'onde à fibre optique

Résumé : Ce mémoire porte sur le comportement des solitons affectés, lors de leur entrée dans un guide d'onde à fibre optique, d'une légère distorsion de profil par rapport au profil stationnaire dans le guide. Notre modèle théorique combine l'équation de propagation du champ électrique (Equation de Schrödinger Non Linéaire) et le système d'équations d'évolution des paramètres physiques de l'impulsion (issu de la théorie des coordonnées collectives). Nous dressons une cartographie générale qui dévoile une diversité insoupçonnée de comportements dynamiques au voisinage de l'état stationnaire de l'impulsion, liée à la perturbation initiale du profil de l'impulsion. Cette cartographie établit une classification des solitons en deux grandes familles, correspondant respectivement aux impulsions lumineuses qui génèrent un rayonnement au cours de leur propagation et aux impulsions non rayonnantes. Au sein de chacune de ces deux grandes familles d'impulsions, nous démontrons l'existence de comportements atypiques, que nous qualifions de *solitons hyperthermiques* (*solitons chauds*), *solitons hypothermiques* (*solitons froids*), et *solitons isothermiques*, qui correspondent respectivement à des impulsions qui se propagent de manière hautement stable avec un niveau d'énergie supérieur, inférieur, et égal à l'énergie de l'état stationnaire. Aux frontières des domaines d'existence de ces différents types de soliton, nous trouvons des comportements hybrides, correspondant à des solitons qui se refroidissent en cours de propagation suite à une perte significative d'énergie provoquée par un rayonnement intense, et qui changent d'état (de l'*hyperthermie* à l'*hypothermie*, ou de l'*isothermie* à l'*hypothermie*). Enfin, l'onde de rayonnement émise par une impulsion lumineuse n'est pas identifiée comme étant un processus continu, mais plutôt comme une bouffée d'énergie émise en début de propagation, et sa suppression dans le guide d'onde est considérée comme réalisable.

Mots-clefs : Fibres optiques, systèmes de transmission optique, soliton moyen, soliton à gestion de dispersion, rayonnement, méthode des coordonnées collectives.

Unified mapping of the dynamics of solitons in fiber-optic waveguides

Abstract : This thesis examines the dynamical behaviour of solitons which are affected, when entering a fiber-optic waveguide, by a slight distortion of profile as compared to the stationary profile in the guide. Our theoretical model combines the propagation equation of the electric field (Non-Linear Schrödinger Equation) and the system of equations of evolution of the physical parameters of the pulse (derived from the collective coordinates theory). We establish a general mapping which reveals an unsuspected diversity of dynamic behaviour around the stationary state of the pulse, in relation with the initial perturbation of the pulse's profile. This mapping establishes a classification of solitons in two broad categories, which correspond to light pulses that generate radiation during their propagation and to non-radiating pulses, respectively. Within each of these two broad classes of pulses, we demonstrate the existence of different kinds of atypical behaviour, which we qualify as *hyperthermic solitons* (*hot solitons*), *hypothermic solitons* (*cold solitons*) and *isothermic solitons*, which correspond respectively to pulses that propagate in a highly stable manner with an energy level higher than, lower than, and equal to the energy of the stationary state. On the borders of the domains of existence of these various types of solitons, we find hybrid behaviours, corresponding to solitons that cool during propagation, due to a significant loss of energy caused by an intense radiation, and which change state (from hyperthermia to hypothermia, or from isothermal to hypothermia). Finally, the radiation emitted by a light pulse is not identified as being a continual process, but rather as a ball of energy emitted in the beginning of propagation, and its suppression in the waveguide is considered as practicable.

Key-words : Optical fibers, optical transmission systems, guiding-center soliton, dispersion-managed soliton, radiation, collective coordinate method.